

TD n°15 - Dérivation

Exercice n°1 Etudier la dérivabilité d'une fonction en un point

Les questions suivantes sont indépendantes :

1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq 1 \\ 3 \ln(x) + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Montrer que f est continue en 1 **puis**, étudier sa dérivabilité en 1.

Le cas échéant donner l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1.

2. Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Montrer que g est continue en 0 **puis**, étudier sa dérivabilité en 0.

Le cas échéant donner l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 0.

3. Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 + e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que h est continue en 0 et que \mathcal{C}_h présente un point anguleux au point d'abscisse 0. Préciser les équations réduites des deux demi-tangentes en 0.

Exercice n°2 Etudier la dérivabilité d'un prolongement par continuité

1. Soit a la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad a(x) = x \ln(x)$$

- (a) La fonction a est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Si oui, le prolongement \tilde{a} associé est-il dérivable en 0 ? Préciser l'allure de $\mathcal{C}_{\tilde{a}}$ au voisinage de 0.
 (b) Etudier la continuité et la dérivabilité de \tilde{a} sur son ensemble de définition.

2. Soit i la fonction définie sur \mathbb{R}^* par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad i(x) = \begin{cases} \sqrt{1+x} & \text{si } x > 0 \\ \sqrt{1-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- (a) La fonction i est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Si oui, le prolongement \tilde{i} associé est-il dérivable en 0 ? Préciser l'allure de $\mathcal{C}_{\tilde{i}}$ au voisinage de 0.
 (b) Etudier la continuité et la dérivabilité de \tilde{i} sur son ensemble de définition.

3. Soit j la fonction définie sur $]0, e[$ par

$$\forall x \in]0, e[, \quad j(x) = \frac{x}{\ln(x) - 1}.$$

- (a) La fonction j est-elle prolongeable par continuité en e ? en 0 ? Si oui, le prolongement \tilde{j} associé est-il dérivable en ces points ? Préciser l'allure de $\mathcal{C}_{\tilde{j}}$ au voisinage de 0 et e .
 (b) Etudier la continuité et la dérivabilité de \tilde{j} sur son ensemble de définition.

Exercice n°3 Etude d'une fonction et prolongement (EML 2020)

On considère la fonction f définie sur $]0; 1[$ par

$$f : x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}.$$

1. Montrer que f est dérivable sur $]0; 1[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0; 1[, \quad f'(x) = \frac{1}{x(1-x)(\ln(x))^2} (-x \ln(x) - (1-x) \ln(1-x)).$$

2. (a) Justifier que : $\forall t \in]0; 1[, t \ln(t) < 0$.
 (b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0; 1[$.
 3. (a) Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0. Préciser la fonction prolongée \tilde{f} associée et en particulier $\tilde{f}(0)$.
 (b) Montrer que \tilde{f} est dérivable en 0 et préciser $\tilde{f}'(0)$.
 4. Calculer la limite de \tilde{f} en 1.
 Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de \tilde{f} ?
 5. Tracer l'allure de la courbe représentative de \tilde{f} dans un repère orthonormé, en faisant figurer la tangente en 0 et les éventuelles asymptotes.

Exercice n°4 Exercice de cours

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0, 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{1 + u_n}$.

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par $f : x \mapsto 2 - \frac{1}{1+x}$.

On note J l'intervalle $\left[\frac{1}{5}; 2\right]$.

1. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que u_n est bien défini et que $u_n \in J$.
 2. Montrer qu'il existe un unique $\ell \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(\ell) = \ell$ et calculer ℓ .

3. On sait que, pour tout $x \in J$, $|f'(x)| \leq \frac{25}{36}$. A l'aide de l'inégalité des accroissements finis, démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \ell| \leq \frac{25}{36} |u_n - \ell|.$$

4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq \left(\frac{25}{36}\right)^n |u_0 - \ell|$.
5. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

Exercice n°5 Etude d'une suite récurrente avec l'IAF exemple n°1

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par $f : x \mapsto \sqrt{1 + x}$.

1. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que u_n est bien défini et que $u_n \in \mathbb{R}_+$.
2. Montrer qu'il existe un unique $\ell \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(\ell) = \ell$ et calculer ℓ .
3. Justifier que f est dérivable sur \mathbb{R}_+ , puis montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
4. A l'aide de l'inégalité des accroissements finis, démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell|.$$

5. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.
6. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.
7. Déterminer $N \in \mathbb{N}$ tel que u_N soit une valeur approchée à 10^{-10} près de ℓ .

On pourra utiliser : $\frac{10 \ln(10)}{\ln(2)} \approx 33,22$.

Exercice n°6 Etude d'une suite récurrente avec l'IAF exemple n°2

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$.

On considère f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$.

1. Justifier que l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in [0; 1]$, admet une unique solution notée λ .
2. Justifier que f est dérivable et déterminer le tableau de variation de f .
En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \in [0; 1]$.
3. Montrer que, pour tout $x \in [0; 1]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$.

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \lambda| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |u_n - \lambda|$.

5. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \lambda| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n$.

6. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

Exercice n°7 Utiliser l'IAF pour établir une inégalité

1. Montrer que si $f = \ln$ (dérivable sur $]0; +\infty[$), alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $\frac{1}{k+1} \leq f'(x) \leq \frac{1}{k}$ pour tout $x \in [k; k+1]$.
2. En déduire, grâce à l'inégalité des accroissements finis que, pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$.
3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, $\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
4. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$.

Exercice n°8 Utiliser l'IAF pour établir une inégalité

1. Montrer que si $f = \ln \circ \ln$ (dérivable sur $]1; +\infty[$), alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, $\frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \leq f'(x) \leq \frac{1}{k \ln(k)}$ pour tout $x \in [k; k+1]$.
2. En déduire, grâce à l'inégalité des accroissements finis que, pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, $\frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \leq \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k)) \leq \frac{1}{k \ln(k)}$.
3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} \geq \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2))$.
4. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$.