TD n°15 - Les séries

Exercice n°1 Etudier la convergence par calcul direct des sommes partielles

1. On considère la série numérique : $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

   On note S_n la somme partielle d'ordre n associée.

   (a) Vérifier que : $\forall k \in \mathbb{N}^{\geq 1}, \quad \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.

   (b) En déduire que : $\forall \in \mathbb{N}^{\geq 1}, \quad S_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$.

   (c) Conclure quant à la nature de cette série. Le cas échéant, donner sa somme.

2. Etudier la nature des séries : $\displaystyle A = \sum_{n\geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ et $\displaystyle B = \sum_{n\geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice n°2 Etudier la convergence par étude de la suite des sommes partielles

On considère la série numérique : $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$. On note S_n la somme partielle d'ordre n associée.

1. Etudier la monotonie de la suite (S_n).
2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, on a : $\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} \leq \dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$.
3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, on a : $\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{n+1} \leq S_n \leq 2 - \dfrac{1}{n}$.
4. En déduire que la suite (S_n) est bornée. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge et donner un encadrement de sa somme.

Exercice n°3 Etudier la suite (u_n) à l'aide de la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$

On admet que, dans chacun des cas suivants, la suite récurrente (u_n) est bien définie. Justifier qu'elle converge et déterminer sa limite.

1. $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{2^n n!}$;
2. $u_0 \in \mathbb{R}$ fixé et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)^3 u_{n+1}^3 = n^3 u_n^3 + 3n^2$.

Exercice n°4 Connaître les séries usuelles

1. Repérer, parmi les séries suivantes, celles qui sont "usuelles" et étudier leurs natures.
2. Parmi les séries qui ne sont pas usuelles, repérer celles qui diverge grossièrement.

1. $\displaystyle A = \sum_{n\geq 3} \frac{1}{2^n}$
2. $\displaystyle B = \sum_{n\geq 2} \frac{n}{5^n}$
3. $\displaystyle C = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^{n+1}} \exp(n)$

1. $\displaystyle D = \sum_{n\geq 2} \frac{n}{\ln(n)}$
5. $\displaystyle E = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n!}$
6. $\displaystyle F = \sum_{n\geq 0} n 3^n (n-1) 2^{-n}$

8. $\displaystyle G = \sum_{n\geq 1} \frac{n(-1)^n}{n!}$
9. $\displaystyle H = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)}$
10. $\displaystyle I = \sum_{n\geq 1} n\left(\exp\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)$

Exercice n°5 Etudier des séries

Justifier la convergence des séries suivantes puis calculer les sommes correspondantes :

1. $\displaystyle A = \sum_{n\geq 0} (2n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^n$
2. $\displaystyle B = \sum_{n\geq 0} \frac{4n^2 + 5n}{2^n}$
3. $\displaystyle C = \sum_{n\geq 0} \frac{n + 3^n}{n!}$

Exercice n°6 Autour de la convergence absolue

1. En utilisant la convergence absolue, justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ est convergente.

   On utilisera le résultat de l'exercice n°2.

2. On considère la suite (S_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}.$$

   (a) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

   (b) Que peut-on conclure quant à la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$?

   (c) La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge-t-elle absolument ?