TD n°16 - Analyse asymptotique (Partie 1)

Développements limités

Exercice n°1 Opérations sur les DL usuels en 0

Déterminer le développement limité à l'ordre n demandé en 0 des fonctions suivantes :

- Opérations simples :

a) $x \mapsto \sin(x) - x\sqrt{1+x}$ $(n=3)$ **b)** $x \mapsto \sin(x)\sqrt{1+x}$ $(n=3)$
c) $x \mapsto (\ln(1+x))^2$ $(n=4)$

- Composée :

d) $x \mapsto \ln(\cos x)$ $(n=4)$ **e)** $x \mapsto \ln(1+\cos x)$ $(n=4)$
f) $x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$ $(n=3)$

- Quotient :

g) $x \mapsto \dfrac{\cos x}{x+1}$ $(n=2)$ **h)** $x \mapsto \dfrac{1}{\cos x}$ $(n=4)$
i) $x \mapsto \dfrac{\sin x - 1}{\cos x + 1}$ $(n=3)$.

Exercice n°2 Déterminer un DL en $a \in \mathbb{R}$

Déterminer le développement limité à l'ordre n demandé en a des fonctions suivantes :

a) $x \mapsto \sqrt{x}$ $(a=3, n=2)$ **b)** $x \mapsto \cos^3(x)$ $(a=\dfrac{\pi}{2}, n=5)$
c) $x \mapsto \tan\left(\dfrac{x\pi}{2}\right)\left(\sqrt{x+2}-1\right)$ $(a=-1, n=2)$

Exercice n°3 Lien entre DL et régularité d'une fonction

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Si $a \neq 0$, f admet-il un $DL_n(a)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$? (Ne pas chercher à le déterminer)
2. Donner, sans effectuer aucun calcul, le $DL_2(0)$ de f.
   Que peut-on en déduire concernant la régularité de f ?
3. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$? De classe C^2 sur $\mathbb{R}$? Deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$?
4. Montrer que f' n'admet pas de DL en 0 à l'ordre 1 malgré que f admet un DL en 0 à l'ordre 2.

Exercice n°4 Utilisation de la formule de Taylor-Young

On fixe $a > 0$. On souhaite obtenir le développement limité de ln à l'ordre n, au voisinage de $x = a$.

1. **Méthode 1 :** Utiliser la formule de Taylor-Young pour obtenir ce $DL_n(a)$.
2. **Méthode 2 :** Se ramener au $DL_n(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x)$.

Exercice n°5 Déterminer un DL par primitivation, DL d'une réciproque

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Retour sur le DL de la fonction tan en 0 :
   (a) Justifier que la fonction tangente admet un $DL_5(0)$.
   (b) **Méthode n°1 :** A partir du $DL_1(0)$ de tan et du lien entre tan et tan$'$, retrouver le $DL_3(0)$ de tan. En réitérant ce procédé, déterminer le $DL_5(0)$ de tan.
   (c) **Méthode n°2 :** En utilisant le fait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan x) = x$, déterminer le $DL_5(0)$ de tan.
2. Etude du DL des fonctions arcsin et arccos en 0.
   (a) Les fonctions arcsin et arccos possèdent-elles un DL en 0 à tout ordre ?
   (b) Déterminer le $DL_4(0)$ de arcsin$'$.
   (c) En déduire le $DL_5(0)$ de arcsin puis de arccos.
3. Soit $\begin{array}{rcl} f :]-1, +\infty[& \to & J \\ x & \mapsto & xe^x \end{array}$
   (a) Montrer que f réalise une bijection de $]-1, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.
   Montrer que f et f^{-1} sont de classe C^∞ sur leurs ensembles de définition.
   (b) Justifier que f^{-1} possède un $DL_3(0)$, puis le déterminer.
   Indication : Utiliser le fait que, pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $f^{-1} \circ f(x) = x$

Applications des développements limités

Exercice n°6 Détermination d'une limite

Déterminer la limite de la fonction f au point demandé :

a) $f(x) = \dfrac{\sin x - \sin(5x)}{\sin x + \sin(5x)}$ en 0 **b)** $f(x) = \dfrac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(3x))}$ en 0
c) $f(x) = \left(\sqrt{x^2+2} - x + 1\right)^x$ en $+\infty$ **d)** $f(x) = \dfrac{\cos(2x)}{2\sin x - \sqrt{2}}$ en $\dfrac{\pi}{4}$
e) $f(x) = \dfrac{1}{x^4}\left(\dfrac{\sin x}{1-\sin x} - \sin\left(\dfrac{x}{1-x}\right)\right)$ en 0.

Exercice n°7 Etude locale d'une fonction

1. On note $I =]-1, +\infty[$.
   On considère f définie, pour tout $x \in I \backslash \{0\}$, par $f(x) = \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$.
   (a) Justifier que f se prolonge en une fonction $\tilde{f}$ continue sur I et que $\tilde{f}$ est dérivable en 0. Préciser la valeur de $\left(\tilde{f}\right)'(0)$.
   (b) Quelle est la position relative de la courbe de $\tilde{f}$ par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0 ?
2. Mêmes questions sur la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1 - \cos x}{\tan^2 x}$ avec $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Exercice n°8 Etude du comportement asymptotique d'une fonction

1. On considère la fonction $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$.

    (a) Montrer que, au voisinage de $+\infty$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{8x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

    (b) En déduire que la courbe de f possède une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et préciser leur position.

    (c) Faire une étude similaire au voisinage de $-\infty$.

2. Montrer que la courbe de f définie par $f(x) = (x^2-1)\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ admet une asymptote en $+\infty$ (resp. $-\infty$) et étudier la position de la courbe par rapport à son asymptote au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Exercice n°9 Etude d'une équation différentielle

Déterminer les éventuelles fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (e^x-1)y'(x) + e^x y(x) = 1.$$

Etudes asymptotiques de suites

Exercice n°10 Comportement asymptotique d'une suite

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}$.

1. Montrer que $u_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{8\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
2. En déduire la limite de $\sqrt{n}u_n - \dfrac{\sqrt{n}}{2}$.

Exercice n°11 Comportement asymptotique d'une suite définie implicitement

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation (E_n) : $e^{-\frac{x}{n}} = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$.
On considérera, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $f_n(x) = x - e^{-\frac{x}{n}}$.

1. Justifier que (E_n) possède une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+$.
2. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < x_n < 1$.
3. En déduire que (x_n) converge vers 1. Traduire cette limite par une écriture en o.
4. Déterminer un réel a tel que $x_n = 1 + \dfrac{a}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
5. En déduire qu'il existe un réel b que l'on déterminera tel que : $x_n = 1 + \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.