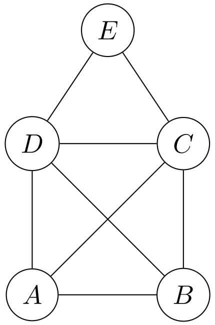
TD n°16 - Les graphes

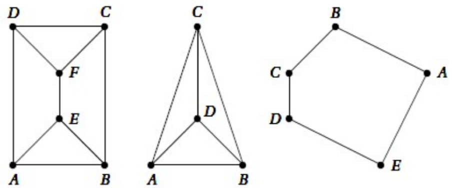
Exercice n°1   Mise en route...



1. Ordre du graphe ?
2. Ce graphe est-il simple ? Est-il complet ?
3. Donner le degré des sommets et le nombre d'arêtes.
4. Déterminer une chaîne eulérienne.

Exercice n°2   Connaître le vocabulaire sur les graphes

Pour chacun des graphes suivants :



G_1 G_2 G_3

1. Indiquer l'ordre du graphe.
2. Déterminer le degré de chaque sommet.
3. Quels graphes admettent une chaîne/cycle eulérien ?

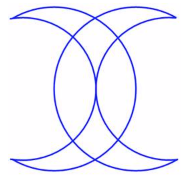
Exercice n°3   Autour des graphes complets

1. Dessiner un graphe complet d'ordre 2, puis 3, 4, 5 et 6.
2. Soit G un graphe complet d'ordre $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Donner le degré des sommets du graphe G.
   (b) Déterminer le nombre d'arêtes de G.

Exercice n°4   Modélisation de situations à l'aide des graphes

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Avez-vous remarqué que dans un groupe de personnes, il y a toujours deux individus qui ont exactement le même nombre d'amis à l'intérieur du groupe ?
   (a) Formaliser cette propriété avec le vocabulaire des graphes.
   (b) A l'aide d'un raisonnement par l'absurde, démontrer cette propriété.
2. Les 24 maires des 24 communes de l'île de la Réunion se sont donnés rendez-vous lors de l'assemblée générale de l'association des maires. A cette occasion, chaque maire serre la main de tous les autres maires (une seule fois). Quel est le nombre de poignées de mains échangées ?
   (a) Formaliser ce problème avec le vocabulaire des graphes.
   (b) Répondre au problème à l'aide d'un théorème du cours.
3. Lors d'une soirée, Charlotte entend 28 tintements de verre. En supposant que chaque personne a trinqué une et une seule fois avec les autres, donner le nombre de personnes présentes à la soirée.
4. Est-il possible de relier 15 ordinateurs en réseau de sorte que chacun soit relié à exactement 3 autres ?
5. Une maison, construite sur un niveau possède 18 ouvertures (portes ou fenêtres) et chaque pièce a deux ouvertures sur l'extérieur et 2 autres sur l'intérieur.
   Combien cette maison possède-t-elle de pièce ?
6. Est-il possible de dessiner la figure suivante sans lever le crayon et sans repasser deux fois sur un même trait ?

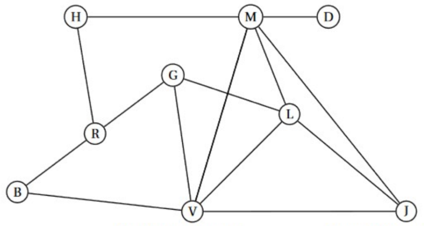


7. Peut-on construire un triangle et son cercle circonscrit associé en une seule fois sans lever le crayon de sa feuille et sans passer deux fois au même endroit ?
8. Est-il possible de transformer un graphe non eulérien en un graphe eulérien en lui rajoutant uniquement un sommet (pouvant être relié éventuellement à d'autres sommets) ?

Exercice n°5 Savoir utiliser la matrice d'adjacence

Sarah, une jeune étudiante en géologie, souhaite partir en voyage en Islande avec des amis. Elle a loué une voiture tout terrain pour pouvoir visiter les lieux remarquables qu'elle a sélectionnés.

Sarah a construit le graphe ci-dessous dont les sommets représentent les lieux à visiter et les arêtes représentent les routes ou pistes :



B : Le lagon bleu. H : Rocher Hvitserkur. M : Lac de Myvatn.
D : Chute d'eau de Dettifoss. J : Lagune glacière de Jôkulsarlôn. R : Capitale Reykjavik.
G : Geyser de Geysir. L : Massif du Landmannalaugar. V : Ville de Vik.

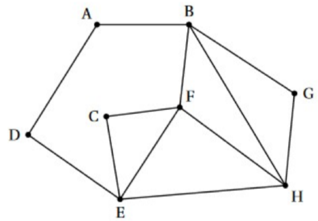
1. Dans cette question, chaque réponse sera justifiée.
   (a) Déterminer l'ordre du graphe.
   (b) Déterminer si le graphe est connexe.
   (c) Déterminer si le graphe est complet.
2. Sarah désire emprunter toutes les routes une et une seule fois. Déterminer, en justifiant, si cela est possible.
3. On appelle M la matrice associée au graphe précédent sachant que les sommets sont placés dans l'ordre alphabétique. On donne ci-dessous une partie de la matrice M ainsi que la matrice M^4 :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M^4 = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 16 & 8 & 14 & 13 & 15 & 2 & 10 \\ 3 & 5 & 5 & 6 & 9 & 11 & 6 & 3 & 12 \\ 16 & 5 & 24 & 11 & 23 & 21 & 26 & 5 & 20 \\ 8 & 6 & 11 & 10 & 13 & 14 & 9 & 3 & 14 \\ 14 & 9 & 23 & 13 & 28 & 29 & 29 & 8 & 30 \\ 13 & 11 & 21 & 14 & 29 & 38 & 32 & 15 & 40 \\ 15 & 6 & 26 & 9 & 29 & 32 & 43 & 14 & 34 \\ 2 & 3 & 5 & 3 & 8 & 15 & 14 & 15 & 21 \\ 10 & 12 & 20 & 14 & 30 & 40 & 34 & 21 & 49 \end{pmatrix}$$

   (a) Il manque certains coefficients de la matrice M. Compléter et recopier uniquement la partie manquante de cette matrice.
   (b) Donner, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 4 permettant d'aller de B à D.

Exercice n°6 Savoir utiliser la matrice d'adjacence

Partie A On considère la graphe $\mathscr{G}$ ci-dessous :



1. Déterminer en justifiant si ce graphe :
   (a) est connexe ;
   (b) admet une chaîne/cycle eulérien.
2. On note M la matrice d'adjacence associé à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique. On donne :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & 3 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 5 & 9 & 6 & 8 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 6 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 5 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 5 & 4 & 8 & 3 & 9 \\ 2 & 9 & 6 & 3 & 8 & 6 & 3 & 9 \\ 1 & 6 & 3 & 2 & 3 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 8 & 3 & 2 & 9 & 9 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

   Donner, en justifiant, le nombre de chemins de longueurs 3 reliant E et B.

Partie B

Un club alpin souhaite proposer à ses membres des randonnées de plusieurs jours dans les Alpes. À cet effet, huit refuges notés A, B, C, D, E, F, G et H ont été sélectionnés. Le graphe $\mathscr{G}$ de la partie A permet de visualiser les différents itinéraires possibles, les sommets représentant les refuges et les arêtes schématisant tous les sentiers de randonnée balisés les reliant.

D'après l'étude effectuée dans la partie A, le club alpin est-il en mesure de proposer :

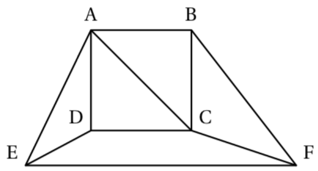
1. un itinéraire au départ du refuge A qui passerait par tous les refuges en empruntant une fois et une seule fois chacun des sentiers ? Si oui, proposer un tel itinéraire ;
2. des itinéraires de trois jours (un jour correspondant à une liaison entre deux refuges) reliant le refuge E au refuge B ? Si oui, combien peut-il en proposer ?

Exercice n°7 Un graphe orienté

Partie A

Le graphe suivant représente le plan d'une ville. Les arêtes du graphe représentent les principales avenues et les sommets du graphe les carrefours entre ces avenues.

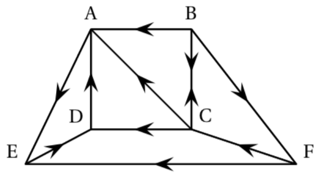
1. Donner l'ordre du graphe puis le degré de chacun des sommets.
2. Un piéton peut-il parcourir toutes ces avenues sans emprunter plusieurs fois la même avenue :
   (a) en partant d'un carrefour et en revenant à son point de départ ? Justifier la réponse.
   (b) en partant d'un carrefour et en arrivant à un carrefour différent ? Justifier la réponse.



Partie B

Dans le graphe ci-contre, on a indiqué, pour cette même ville, le sens de circulation pour les véhicules sur les différentes avenues.

1. Peut-on trouver un trajet de longueur quelconque qui permet d'aller de D à B en respectant les sens de circulation ? Justifier la réponse.
2. Écrire la matrice M associée à ce graphe (on rangera les sommets dans l'ordre alphabétique)

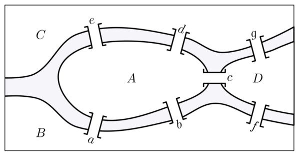


1. On donne la matrice

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Que représentent les coefficients de cette matrice ?
   (b) Combien y-a-t-il de chemins de longueur 3 partant du carrefour B et arrivant en A ? Écrire tous ces chemins.
   (c) Combien y-a-t-il de chemins de longueur 3 arrivant au point E ? Expliquer la démarche.

Exercice n°8 Un problème historique



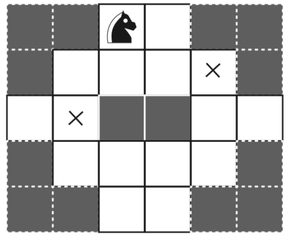
La ville de Königsberg est construite autour de deux îles situées sur le Pregel et reliées entre elles par un pont. Six autres ponts relient les rives de la rivière à l'une ou l'autre des deux îles.

1. Déterminer s'il existe ou non une promenade dans les rues de Königsberg permettant, à partir d'un point de départ au choix, de passer une et une seule fois par chaque pont et de revenir à son point de départ, étant entendu qu'on ne peut traverser le Pregel qu'en passant sur les ponts.
2. Combien existe-t-il de parcours partant d'un lieu fixé (mettons B) empruntant exactement 3 ponts et amenant à un autre lieu fixé (mettons D) ? On peut emprunter plusieurs fois un même pont.

Exercice n°9 Récréations autour des graphes

1. Un cavalier de jeu d'échec se trouve sur le damier de la figure ci-dessous où seules les cases blanches sont accessibles (mais on peut sauter par dessus une case noire). On rappelle qu'un cavalier d'échec se déplace selon la diagonale d'un rectangle de deux cases sur trois, dans n'importe quelle direction. Les deux cases marquées d'une croix sont les seules que la cavalier peut atteindre lors du premier saut.

   S'il ne doit jamais se poser plus d'une fois sur une même case, combien de cases blanches ce cavalier peut-il visiter au maximum, y compris sa case de départ ?



2. On considère un dodécadèdre régulier, c'est-à-dire un polyèdre à 12 faces en forme de pentagone régulier, comme dans la figure ci-dessous. Le jeu consiste à partir d'un sommet quelconque et à voyager le long des arêtes du dodécaèdre de manière à passer une fois seulement par tous les autres sommets puis revenir au point de départ.
   Est-ce possible ? Si oui, trouver un tel parcours. Sinon, donner le maximum de sommets qui peuvent être visités.