TD n°16 - Les séries

Exercice n°1 Etudier la convergence par calcul direct des sommes partielles

1. On considère la série $\sum_{n\geq 1} n^2$. On note S_n la somme partielle d'ordre n associée.
   (a) Ecrire une expression de S_n en fonction de n sans le symbole $\sum$.
   (b) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 1} n^2$ et, le cas échéant, la somme de cette série.
2. Répondre aux mêmes questions pour les séries $\sum_{n\geq 2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\sum_{n\geq 3} 2^{2n}\frac{3}{5^n}$

Exercice n°2 Résultat général sur les séries géométriques

Soit $x\in\mathbb{R}$. On considère la série $\sum_{n\geq 0} x^n$. On note S_n la somme partielle d'ordre n associée.

1. Ecrire une expression de S_n en fonction de n sans le symbole $\sum$.
2. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 0} x^n$ fonction de $x\in\mathbb{R}$ et, le cas échéant, la somme de cette série.

Exercice n°3 Etudier la convergence par calcul direct des sommes partielles

On considère la série numérique : $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}$ et, pour $n\in\mathbb{N}^{\geq 1}$.

On note S_n la somme partielle d'ordre n associée.

1. Vérifier que : $\forall k\in\ \mathbb{N}^{\geq 1},\quad \frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$.
2. En déduire que : $\forall\in\mathbb{N}^{\geq 1},\quad S_n=1-\frac{1}{n+1}$.
3. Conclure quant à la nature de cette série. Le cas échéant, donner sa somme.

Exercice n°4 Etudier la convergence par calcul direct des sommes partielles

Etudier la nature des séries : $A=\sum_{n\geq 2}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$ et $B=\sum_{n\geq 2}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice n°5 Etudier la convergence par étude de la suite des sommes partielles

1. On considère la série numérique : $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$.

   On note S_n la somme partielle d'ordre n associée.
   (a) Montrer que, pour tout $k\in\mathbb{N}^{\geq 2}$, on a : $\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\leq\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$.
   (b) En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}^{\geq 2}$, on a : $\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}\leq S_n\leq 2-\frac{1}{n}$.
   (c) En déduire que la suite (S_n) est majorée.
   (d) Etudier la monotonie de la suite (S_n).
   (e) En déduire que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge et donner un encadrement de sa somme.
2. On considère la série numérique : $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$.

   On note H_n la somme partielle d'ordre n associée.
   (a) Montrer que, pour tout $x\in[1;+\infty[$, on a : $\ln(x+1)-\ln(x)\leq\frac{1}{x}$.
   (b) En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}^{\geq 1}$, on a : $\ln(1+n)\leq H_n$.
   (c) En déduire que la nature de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$.

Exercice n°6 Résultat général sur les séries géométriques dérivées une et deux fois

Soit $n\in\mathbb{N}^{\geq 1}$. On considère la fonction définie, pour tout $x\in\mathbb{R}$, par $f(x)=\sum_{k=0}^{n}x^k$.

On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $x\in\mathbb{R}$. Réécrire $f(x)$ sans le symbole $\sum$.
2. Proposer deux expressions de $f'(x)$. Calculer $\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}$.
3. En déduire que la série $\sum_{n\geq 1}nx^{n-1}$ converge si et seulement si $x\in]-1;1[$ et que, dans ce cas, $\sum_{k=1}^{+\infty}kx^{k-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$.
4. Soit $n\in\mathbb{N}^{\geq 2}$. En vous inspirant de la démarche précédente, montrer que la série $\sum_{n\geq 2}n(n-1)x^{n-2}$ converge si et seulement si $x\in]-1;1[$ et que, dans ce cas, $\sum_{k=2}^{+\infty}k(k-1)x^{k-2}=\frac{2}{(1-x)^3}$.

Exercice n°7 Etude d'une suite par étude de la série télescopique associée

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0,1[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$, puis montrer que la suite (u_n) converge. Déterminer sa limite.
2. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} u_n^2$ converge et calculer sa somme.
3. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente.

Exercice n°8 Connaître les séries usuelles

Etudier la nature des séries suivantes puis, en cas de convergence, calculer les sommes correspondantes :

1. $A = \sum_{n\geq 3} \frac{1}{2^n}$
2. $B = \sum_{n\geq 1} \frac{4n}{5^{n-1}}$
3. $C = \sum_{n\geq 0} \frac{2^{2n}}{3^{n+1}}$
4. $D = \sum_{n\geq 2} \frac{n}{5^n}$
5. $F = \sum_{n\geq 0} n3^n(n-1)2^{-n}$
6. $I = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n!}$
7. $G = \sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{5^n}$
8. $H = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n n}{3^n}$
9. $J = \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n!}$
10. $K = \sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{(n+1)!}$
11. $L = \sum_{n\geq 0} \frac{n2^n}{n!}$

Exercice n°9 Etudier des séries

Justifier la convergence des séries suivantes puis calculer les sommes correspondantes :

1. $F = \sum_{n\geq 0} (2n-3)\left(\frac{1}{7}\right)^n$
2. $C = \sum_{n\geq 0} \frac{4n^2+5n}{5^n}$
3. $B = \sum_{n\geq 0} \frac{n^2+3n+4}{n!}$
4. $D = \sum_{n\geq 0} \frac{3n^2-5n+4^n}{n!}$

Exercice n°10 Autour de la convergence absolue

1. En utilisant la convergence absolue, justifier que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ est convergente.

   On utilisera le résultat de l'exercice n°5.
2. On considère la suite (S_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}.$$

   (a) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

   (b) Que peut-on conclure quant à la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$?

   (c) La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge-t-elle absolument ?