TD n°17 - Espaces vectoriels de dimension finie

Familles finies de vecteurs

Exercice n°1 Méthode pour étudier la liberté d'une famille de fonctions

Montrer dans chaque cas que la famille est libre.

1. **Valeur en un point :** Dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, étudier la famille $(1, \cos, \sin)$.
2. **Calculs de limites :**
   (a) Dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}_+^\star,\mathbb{R})$, étudier la famille $(\exp, \ln, x \mapsto x^2)$.
   (b) Soit $p \in \mathbb{N}^\star$. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^\star}$, étudier la famille $\left(\left(\frac{1}{n}\right), \left(\frac{1}{n^2}\right), \ldots, \left(\frac{1}{n^p}\right)\right)$.
   (c) Que peut-on déduire du résultat de la question précédente ?
   (d) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, étudier la famille $(f_1, \ldots, f_n)$, $f_k : x \mapsto e^{\lambda_k x}$ où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des réels distincts.
   (e) Que peut-on déduire du résultat de la question précédente ?

Exercice n°2 Etudier une famille de $\mathbb{K}^n$

1. Les vecteurs $u_1 = (1,1,2)$, $u_2 = (0,1,4)$, $u_3 = (1,0,-2)$, $u_4 = (-5,16,24)$ forment-ils une famille libre de $\mathbb{R}^3$? Sinon, déterminer les relations de dépendance linéaire entre ces vecteurs.
2. Les vecteurs $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (0,1,4)$, $v_3 = (1,0,-2)$ forment-ils une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$? Si oui, déterminer les décompositions des éléments de $\mathbb{R}^3$ par rapport à cette famille.
3. Soient $w_1 = (1,2,3,4)$, $w_2 = (1,1,1,3)$, $w_3 = (-1,0,-1,2)$ et $w_4 = (1,0,0,0)$ quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$.
   (a) Etudier la liberté de la famille (w_1, w_2, w_3). La compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.
   (b) Etudier la liberté de la famille (w_1, w_2, w_3, w_4).
   Peut-on la restreindre ou la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$?
   (c) Déterminer les coordonnées du vecteur w_4 dans la base (w_1, w_2, w_3) de $F = \mathrm{Vect}(w_1, w_2, w_3)$.

Exercice n°3 Etudier la liberté d'une famille de matrices

Les matrices suivantes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ forment-elles une famille libre ? Une base de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Exercice n°4 Etudier si une famille donnée est une base

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
   Dire si les familles suivante sont des bases de E :
   - $\mathscr{F}_1 = (e_1, e_1 + e_2, \ldots, e_1 + e_{n-1}, e_1 + e_n)$;
   - $\mathscr{F}_2 = (e_1 + e_2, e_2 + e_3, \ldots, e_{n-1} + e_n)$;
   - $\mathscr{F}_3 = (e_1 + e_2, e_2 + e_3, \ldots, e_{n-1} + e_n, e_n + e_1)$.
2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie 3.
   Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ (on dit que f est nilpotent d'indice 3).
   Soit $x \in E$ tel que $f^2(x) \neq 0_E$. La famille $(x,\ f(x),\ f^2(x))$ est-elle une base de E ?

Exercice n°5 Déterminer la dimension d'un espace vectoriel

Montrer que chacun des ensembles F suivants est un espace vectoriel de dimension finie, puis en déterminer une base et la dimension :

1. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\}$.
2. $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \text{ et } x - y + 2z + t = 0\}$.
3. $F = \mathrm{Vect}((u_n), (v_n), (w_n))$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$, $v_n = 3^n$ et $w_n = 4^n$.

Exercice n°6 Montrer que deux sev sont égaux

Montrer que, dans $\mathbb{R}^3$, les deux vecteurs $u = (1,1,0)$ et $v = (1,0,1)$ engendrent le même espace vectoriel que les vecteurs $w = (1,3,-2)$ et $t = (1,4,-3)$.

Exercice n°7 Déterminer la dimension de sev de $\mathbb{R}^4$

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs

$$a = (0,1,-1,2),\ b = (1,3,0,2),\ c = (2,1,-3,4),\ d = (0,0,2,1) \quad \text{et} \quad e = (-1,1,0,3).$$

On pose $F = \mathrm{Vect}(a,b,c)$ et $G = \mathrm{Vect}(d,e)$.
Déterminer les dimensions de F, G, $F + G$ et $F \cap G$.

Exercice n°8 Manipuler des supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$

1. Soit $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = t \text{ et } 2x = z + t\}$ et $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid z + 2t = 0 \text{ et } z + t = x\}$.
   (a) Prouver que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$ en trouvant une base adapté.
   (b) Prouver que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$ en utilisant une autre méthode.
2. Soit $F = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^{n} x_k = 0\right\}$.
   (a) Déterminer une base de F. Construire un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^n$.
   (b) Si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, déterminer le projeté de x sur $G = \mathrm{Vect}((1,0,\ldots,0))$ parallèlement à F.