TD n°17 - Dérivation

Exercice n°1 Des calculs de dérivées, pour s'entraîner

Calculer les dérivées suivantes sans donner de justification quant à l'existence de cette dérivée :

$$a(x) = \ln(1+x^2) \qquad b(x) = \frac{e^{2x}}{x^2-1} \qquad c(x) = \exp\left(x + \frac{1}{x}\right) \qquad d(x) = \sqrt{x^2+x+1}$$

$$e(x) = \frac{-x+2}{x+1} \qquad f(x) = \frac{x^2+2x+2}{3-x} \qquad g(x) = \ln(\sqrt{3x}+5) \qquad h(x) = \left(\ln(x^2-1)+1\right)^x$$

Exercice n°2 Etudier la dérivabilité d'une fonction en un point

Les questions suivante sont indépendantes :

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ 3\ln(x)+1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$
Montrer que f est continue en 1 **puis**, étudier sa dérivabilité en 1.
Le cas échéant donner l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2+1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$
Montrer que g est continue en 0 **puis**, étudier sa dérivabilité en 0.
Le cas échéant donner l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 0.

3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{1/x}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$
Montrer que h est continue en 0 et que $\mathscr{C}_h$ présente un point anguleux au point d'abscisse 0. Préciser les équations réduites des deux demi-tangentes en 0.

Exercice n°3 Etudier la dérivabilité d'un prolongement par continuité

1. Soit i la fonction définie sur $\mathbb{R}^\star$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}^\star, \quad i(x) = \begin{cases} \sqrt{1+x} & \text{si} \quad x > 0 \\ \sqrt{1-x} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$
La fonction i est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Si oui, le prolongement $\tilde{i}$ associé est-il dérivable en 0 ? Préciser l'allure de $\mathscr{C}_{\tilde{i}}$ au voisinage de 0.

2. Soit j la fonction définie sur $]0,e[$ par
$$\forall x \in]0,e[, \quad j(x) = \frac{x}{\ln(x)-1}.$$
La fonction j est-elle prolongeable par continuité en e ? en 0 ? Si oui, le prolongement $\tilde{j}$ associé est-il dérivable en ces points ? Préciser l'allure de $\mathscr{C}_{\tilde{j}}$ au voisinage de 0 et e.

Exercice n°4 Etudier la dérivabilité d'une fonction sur un ensemble donné

Etudier la continuité et la dérivabilité des suivantes sur leurs ensembles de définition :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad a(x) = \begin{cases} x\ln(x) & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad b(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}, \quad c(x) = \exp\left(1 + \frac{1}{x}\right), \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad d(x) = \ln\left(1+\sqrt{x}\right)$$

$$\forall x \in]-\infty;1], \quad e(x) = \sqrt{1-x}, \qquad \forall x \in [-1;1], \quad f(x) = (x-1)\sqrt{x^2-1}$$

Exercice n°5 Etude d'une fonction et prolongement (EML 2020)

On considère la fonction f définie sur $]0;1[$ par

$$f : x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}.$$

1. Montrer que f est dérivable sur $]0;1[$ et que l'on a :
$$\forall x \in]0;1[, \quad f'(x) = \frac{1}{x(1-x)\left(\ln(x)\right)^2}\left(-x\ln(x) - (1-x)\ln(1-x)\right).$$

2. (a) Justifier que : $\forall t \in]0;1[,\ t\ln(t) < 0$.
   (b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0;1[$.

3. (a) Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.
   Préciser la fonction prolongée $\tilde{f}$ associée et en particulier $\tilde{f}(0)$.
   (b) Montrer que $\tilde{f}$ est dérivable en 0 et préciser $\tilde{f}'(0)$.

4. Calculer la limite de $\tilde{f}$ en 1.
   Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de $\tilde{f}$?

5. Tracer l'allure de la courbe représentative de $\tilde{f}$ dans un repère orthonormé, en faisant figurer la tangente en 0 et les éventuelles asymptotes.

Exercice n°6 Exercice de cours

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0,2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{1+u_n}$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f : x \mapsto 2 - \dfrac{1}{1+x}$.

On note J l'intervalle $\left[\dfrac{1}{5}; 2\right]$.

1. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que u_n est bien défini et que $u_n \in J$.
2. Montrer qu'il existe un unique $\ell \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(\ell) = \ell$ et calculer ℓ.
3. On sait que, pour tout $x \in J$, $|f'(x)| \leq \dfrac{25}{36}$. A l'aide de l'inégalité des accroissements finis, démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \ell| \leq \frac{25}{36}|u_n - \ell|.$$
4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq \left(\dfrac{25}{36}\right)^n |u_0 - \ell|$.
5. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

Exercice n°7 Etude d'une suite récurrente avec l'IAF exemple n°1

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$.

1. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que u_n est bien défini et que $u_n \in \mathbb{R}_+$.
2. Montrer qu'il existe un unique $\ell \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(\ell) = \ell$ et calculer ℓ.
3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, puis montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.
4. A l'aide de l'inégalité des accroissements finis, démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ell|.$$
5. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$.
6. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.
7. Déterminer $N \in \mathbb{N}$ tel que u_N soit une valeur approchée à 10^{-10} près de ℓ.

   On pourra utiliser : $\dfrac{10\ln(10)}{\ln(2)} \approx 33,22$.

Exercice n°8 Etude d'une suite récurrente avec l'IAF exemple n°2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$.

On considère f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$.

1. Justifier que l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in [0;1]$, admet une unique solution notée λ.
2. Justifier que f est dérivable et déterminer le tableau de variation de f.
   En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \in [0;1]$.
3. Montrer que, pour tout $x \in [0;1]$, $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \lambda| \leq \dfrac{1}{\sqrt{e}}|u_n - \lambda|$.
5. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \lambda| \leq \left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)^n$.
6. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

Exercice n°9 Etude d'une suite récurrente avec l'IAF exemple n°3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = x - \ln(x).$$

On admet que : $0,6 < \ln(2) < 0,7$.

1. Dresser le tableau de variation de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ d'inconnue $x \in]0;+\infty[$ admet exactement deux solutions, que l'on notera a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.
3. Montrer que $b \in [2;4]$.

Dans la suite, on pose $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien définie et que $u_n \in [b;+\infty[$.
2. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.
3. (a) A l'aide de l'inégalité des accroissements finis appliquée à une fonction que vous préciserez, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - b \leq \dfrac{1}{2}(u_n - b)$.

   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n - b \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
4. (a) Ecrire une fonction `suite` python prenant pour argument d'entré un entier `n` et renvoyant la valeur de u_n.

(b) Recopier et compléter la fonction python suivante afin que, prenant en argument réel *epsilon* strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de b à *epsilon* près.

```
def valeur_approchee(epsilon):
    n=0
    while ......
        n=n+1
    return suite(n)
```

Exercice n°10 Utiliser l'IAF pour établir une inégalité

1. Montrer que si $f = \ln$ (dérivable sur $]0;+\infty[$), alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $\dfrac{1}{k+1} \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{k}$ pour tout $x \in [k;k+1]$.
2. En déduire, grâce à l'inégalité des accroissements finis que, pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$.
3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, $\ln(n+1) \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
4. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.

Exercice n°11 Utiliser l'IAF pour établir une inégalité

1. Montrer que si $f = \ln \circ \ln$ (dérivable sur $]1;+\infty[$), alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, $\dfrac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{k\ln(k)}$ pour tout $x \in [k;k+1]$.
2. En déduire, grâce à l'inégalité des accroissements finis que, pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, $\dfrac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leq \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k)) \leq \dfrac{1}{k\ln(k)}$.
3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \geq \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2))$.
4. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)}$.