TD n°17 - Espaces probabilisés

Exercice n°1 Utiliser la notion d'incompatibilité

On dispose d'une grille infinie dont les lignes sont numérotées $0, 1, 2, \ldots$ et les colonnes sont numérotées $0, 1, 2, \ldots$. On place un jeton au hasard sur cette grille et on note $A_{i,k}$:"Le jeton est placé en ligne i et colonne k".
On suppose que l'on a :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{N}, P(A_{i,k}) = \frac{1}{e2^{k+1}i!}.$$

1. Soit $i \in \mathbb{N}$. Calculer la probabilité de L_i : "Le jeton est placé sur la ligne i".
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer la probabilité de C_k : "Le jeton est placé sur la colonne k".
3. Calculer la probabilité de D : "Le jeton est placé sur la diagonale de la grille".

Exercice n°2 Utiliser les notions d'indépendance et d'incompatibilité

On lance une pièce équilibrée indéfiniment, les lancers sont supposés indépendants. On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, P_k : "Obtenir pile au k-ième lancer".

1. Rappeler, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, une écriture de l'événement A_n : "Obtenir le premier pile au n-ième lancer", à l'aide des P_k. Calculer $P(A_n)$.
2. Exprimer l'événement Z : "Obtenir le premier pile au bout d'un nombre pair de lancers" à l'aide des A_n. Calculer $P(Z)$.

Exercice n°3 Utiliser les théorèmes de limite monotone

A la roulette, la probabilité de miser sur le bon numéro est égale à $\frac{1}{37}$. Un joueur effectue une infinité de parties, supposées indépendantes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note G_n l'événement : "le joueur gagne la n-ième partie", A_n l'événement : "au cours des n premières parties, le joueur gagne au moins une fois"et A l'événement : "le joueur gagne au moins une fois".

1. Exprimer A_n en fonction des G_k, puis calculer $P(A_n)$.
2. Justifier que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   En déduire que l'événement A est presque certain.

Exercice n°4 Indépendance, incompatibilité et théorème de limite monotone

On lance indéfiniment une pièce truquée pour laquelle la probabilité d'obtenir face est $p \in]0;1[$. Les lancers sont supposés indépendants. On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, F_k : "Obtenir face au k-ième lancer". Pour $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, on note A_n l'événement "au cours des n premiers lancers, face n'est jamais suivi de pile"et A l'événement "face n'est jamais suivi de pile"

1. Ecrire les événements A_2, A_3 et A_4 à l'aide des événements F_k.
   Déterminer une expression de A_n à l'aide des F_k.
2. On suppose que $p = \frac{1}{2}$. Montrer que $P(A_n) = \frac{n+1}{2^n}$.
3. On suppose que $p \neq \frac{1}{2}$. Montrer que $P(A_n) = \frac{p^{n+1} - (1-p)^{n+1}}{2p-1}$.
4. Dans tous les cas, montrer que A est presque impossible.

Exercice n°5 Indépendance et théorème de limite monotone

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 - x \leq \exp(-x)$.
2. Soit $(A_n)_{n\geq 2}$ une suite d'évènements indépendants tels que :
   pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, $P(A_n) = \frac{1}{n}$.
   (a) Calculer $P(\overline{A_2} \cap \overline{A_3})$.
   (b) En utilisant la question 1, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$:
   $$P\left(\bigcap_{k=2}^{n} \overline{A_k}\right) \leq \exp\left(-\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}\right).$$
   (c) On admet que $\sum \frac{1}{k}$ est une série divergente.
   Montrer que, presque sûrement, au moins l'un des évènements A_n est réalisé.

Exercice n°6 Indépendance, incompatibilité et théorème de limite monotone

On lance une pièce équilibrée indéfiniment, les lancers sont supposés indépendants. On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, P_k : "Obtenir pile au k-ième lancer".

1. Soit $N \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Calculer la probabilité d'obtenir uniquement des faces à partir du N-ième lancer.
2. En déduire qu'il est presque impossible d'obtenir uniquement des piles à partir d'un certain moment.

Exercice n°7 Utiliser la formule des probabilités composées

Une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On tire une boule dans l'urne, on note sa couleur puis, on la remet dans l'urne en rajoutant une boule de la même couleur, et on répète l'opération indéfiniment. On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, l'événement R_k : "Une boule rouge est tirée au k-ième tirage".

1. (a) Quelle est la probabilité de A_n : "les n premières boules tirées sont rouges"?
   (b) Montrer que, presque sûrement, une boule blanche sera tirée.
2. Dans cette question on modifie l'expérience en ajoutant non plus une mais deux boules de la même couleur que celle tirée.
   (a) Quelle est la probabilité de A_n : "les n premières boules tirées sont rouges"?
   (b) Montrer que, pour tout $x > -1$, $\ln(1 + x) \leq x$.