

TD n°17 - Intégration

Exercice n°1 Savoir calculer une intégrale en repérant une primitive usuelle

Justifier l'existence des intégrales suivantes puis les calculer :

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{-2}^3 (x^3 + x - 1) dx & I_4 &= \int_1^2 \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt & I_7 &= \int_0^5 t|t^2 - 1| dt \\
 I_2 &= \int_3^{11} \sqrt{2x+3} dx & I_5 &= \int_0^2 \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx \\
 I_3 &= \int_0^1 \frac{t^4}{\sqrt{t^5+3}} dt & I_6 &= \int_1^e \frac{(\ln t)^2}{t} dt
 \end{aligned}$$

Exercice n°2 Savoir calculer une intégrale par IPP

Justifier de l'existence des intégrales suivantes puis les calculer à l'aide d'une IPP :

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^1 te^{2t} dt & I_3 &= \int_0^1 \ln(x) dx \\
 I_2 &= \int_1^2 t \ln(t) dt & I_4 &= \int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt
 \end{aligned}$$

Exercice n°3 Savoir calculer une intégrale par changement de variable

Justifier l'existence des intégrales suivantes puis les calculer à l'aide d'un changement de variable :

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_1^{4/3} \frac{x^2}{(3x-2)^2} dx & I_3 &= \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx \\
 &\text{en posant } t = 3x - 2 & &\text{en posant } t = e^{\sqrt{x}} \\
 I_2 &= \int_1^2 \frac{e^{2x}}{1-e^x} dx & I_4 &= \int_1^4 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx \text{ en posant } t = \sqrt{x} \\
 &\text{en posant } t = e^x & &
 \end{aligned}$$

Exercice n°4 Calculs d'intégrales : primitive, linéarité, IPP

L'objectif est de calculer les trois intégrales dont on admet l'existence :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}, \quad J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx, \quad K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2} dx.$$

1. **Calcul de I** : Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par :

$$\forall x \in [0; 1], \quad f(x) = \ln \left(x + \sqrt{x^2+2} \right).$$

(a) Calculer la dérivée de f .

(b) En déduire la valeur de I

2. **Calcul de J et K .**

(a) Sans calculer explicitement les intégrales J et K , vérifier que $J + 2I = K$.

(b) A l'aide d'une IPP portant sur K , montrer que $K = \sqrt{3} - J$.

(c) En déduire les valeurs de J et K .

Exercice n°5 Etudier une suite définie par une intégrale

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 t^n e^t dt$.

1. Justifier l'existence de I_n .

2. Calculer I_0 .

3. **Etude de la convergence, méthode n°1**

(a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n$.

(b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
Justifier que (I_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}_+$.

(c) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = e - (n+1)I_n.$$

(d) En raisonnant par l'absurde, justifier que $\ell = 0$.

4. **Etude de la convergence, méthode n°2**

(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, 1], \quad 0 \leq t^n e^t \leq e t^n$.

(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$.

(c) En déduire que (I_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice n°6 Etudier des suites définies par des intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, on pose : $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$.

1. A l'aide d'un encadrement judicieux de I_n , justifier que (I_n) converge et déterminer sa limite.

2. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx = 1$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = nI_n$.

(a) A l'aide d'une IPP, montrer que $J_n = \ln(2) - \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$.

(b) Montrer que, pour tout $t \geq 0, 0 \leq \ln(1+t) \leq t$.

(c) En déduire que (J_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice n°7 Etudier une fonction définie par une intégrale

On considère la fonction φ définie sur \mathbb{R}_+^* par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$.

1. (a) Montrer que φ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et déterminer $\varphi'(x)$.
(b) En déduire les variations de φ .
2. (a) Montrer que, pour tout $t > 0$, on a $\frac{e^t}{t} \geq \frac{1}{t}$.
(b) En déduire que, pour tout $x \in]0, 1]$, $\varphi(x) \leq \ln(x)$.
(c) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x)$.
3. (a) Montrer que, pour tout $t > 0$, on a $e^t \geq \frac{t^2}{2}$.
(b) En déduire que, pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\frac{x^2 - 1}{4} \leq \varphi(x)$.
(c) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$.

Exercice n°8 Etudier une fonction définie par une intégrale

On considère la fonction Ψ définie sur \mathbb{R} par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Psi(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$.

1. Montrer que Ψ est impaire.
2. Montrer que la fonction Ψ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , préciser sa dérivée et donner le sens de variations de Ψ .
3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $xe^{-4x^2} \leq \Psi(x) \leq xe^{-x^2}$.
4. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Psi(x)$ puis $\lim_{x \rightarrow -\infty} \Psi(x)$.