# TD n°18 - Analyse asymptotique (Partie 2)

## Recherche d'équivalents

**Exercice n°1 Savoir déterminer un équivalent simple**

Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes, au voisinage du point donné :

- En utilisant seulement les équivalents usuels (donc sans faire de DL) :

**a)** $\ln(1+\sin(x))$ en 0 **b)** $\dfrac{\cos(x)-1}{x\tan(3x)}$ en 0 **c)** $\dfrac{\sqrt{1+(\tan x)^2}-1}{\arctan(x)}$ en 0

**d)** $\dfrac{\ln(\cos(3x))}{(\sin(2x))^3}$ en 0 **e)** $\dfrac{x^5+2x^3+2}{2x^6+2x+1}$ en $+\infty$ **f)** $\sqrt{x^2+x+1}-x$ en $+\infty$

**g)** $\dfrac{x^x-1}{x-1}$ en 1 **h)** $\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$ en 4 **i)** $(\sin x)^{\sin x}-1$ en 0

- A l'aide de DL :

**a)** $\dfrac{\sin(x)-\sin(5x)}{\tan(x)-\tan(5x)}$ en 0 **b)** $\dfrac{\cos(x)-\sin(x)}{1-\sqrt{2}\sin(x)}$ en $\dfrac{\pi}{4}$ **c)** $x(2+\cos(x))-3\sin(x)$ en 0

**d)** $(1+x)^{\frac{1}{x}}-e$ en 0 **e)** $\dfrac{1}{\sin(x)}-\dfrac{1}{\tan(x)}$ en 0. **f)** $\dfrac{1}{\sqrt{2+3x}}-\dfrac{1}{\sqrt{2-3x}}$ en 0.

- Faire le dernier sans DL.

## Applications des équivalents

**Exercice n°2 Détermination d'une limite**

Déterminer la limite de la fonction $f$ au point demandé :

**a)** $\dfrac{\sin(x\ln x)}{x}$ en 0 **b)** $\dfrac{e^{\cos(x)-1}-1}{x^2}$ en 0 **c)** $\dfrac{\ln(\sin^2 x)}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$ en $\dfrac{\pi}{2}$

**d)** $\ln(x).\ln(1+\ln(1+x))$ en 0 **e)** $\left(\dfrac{1}{\cosh(x)}\right)^{\frac{1}{\sin^2(x)}}$ en 0 **f)** $(1+3\tan^2(x))^{\frac{1}{x\sin x}}$ en 0.

**Exercice n°3 Révisions sur les études locales de fonctions**

1. On pose, pour $x\in]-1;+\infty[\backslash\{0\}$, $\quad f(x)=\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.
   (a) Montrer que $f$ se prolonge en une fonction continue $\tilde{f}$ sur $]-1;+\infty[$.
   (b) Montrer que $\tilde{f}$ est dérivable en 0. Quelle est la position relative de la courbe de $\tilde{f}$ par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0 ?
2. On pose, pour tout $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\backslash\{0\}$, $\quad f(x)=\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}$.
   Montrer que l'on peut prolonger $f$ en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.
3. On pose, pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\{1\}$, $\quad f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$.
   Montrer que la courbe représentative de $f$ admet une asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$, puis étudier la position relative de la courbe et de cette asymptote au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

## Etudes asymptotiques de suites

**Exercice n°4 Comportement asymptotique d'une suite**

1. Donner un équivalent de :

**a)** $u_n=\sqrt{n}+\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)+\dfrac{1}{n}+\ln(n^2)$ **b)** $u_n=\ln(n+1)-\ln(n+2)$ **c)** $u_n=n^{\frac{1}{n}}-1$

**d)** $u_n=\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n-1}$ **e)** $u_n=\ln(n^2-3n+2)$ **f)** $u_n=\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{\ln n}-1$

2. Calculer, dans chacun des cas suivants, la limite de la suite $(u_n)$ :

**a)** $u_n=\left(\dfrac{2n+1}{2n-1}\right)^n$ **b)** $u_n=\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan n\right)^{\cosh(\ln n)}$ **c)** $u_n=\left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{n\ln n}$

**Exercice n°5 Suite définie implicitement n°1, équivalent**

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on considère l'équation $(E_n)$ : $\dfrac{2x}{\pi}\tan\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)=\dfrac{1}{n}$ d'inconnue $x\in[0;1[$.
On notera $f:x\mapsto\dfrac{2x}{\pi}\tan\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$ définie sur $[0;1[$.

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $(E_n)$ possède une unique solution que l'on notera $x_n$.
2. L'objectif de cette question est d'étudier la limite de la suite $(x_n)_{n\geq1}$.
   (a) Rappeler la définition, à l'aide des quantificateurs, de "$f$ est strictement croissante sur $[0;1[$".
   (b) En utilisant la stricte croissance de $f$ montrer la stricte décroissance de $(x_n)_{n\geq1}$. Que peut-on déduire quant à $(x_n)_{n\geq1}$ ?
   (c) Déterminer la limite de la suite $(x_n)_{n\geq1}$.
3. Déterminer un équivalent simple de $(x_n)_{n\geq1}$.

**Exercice n°6 Suite définie implicitement n°2, développement asymptotique**

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on considère l'équation $(E_n)$ : $e^x+x=n$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}_+$.
On notera $f:x\mapsto x+e^x$.

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $(E_n)$ possède une unique solution que l'on notera $x_n$.
2. Montrer que $(x_n)_{n\geq1}$ est strictement croissante et déterminer sa limite.
3. Justifier que $x_n=o(e^{x_n})$ et montrer que $u_n\sim\ln n$.
4. Pour $n\in\mathbb{N}^\star$, montrer que $x_n=\ln(n)+\ln\left(1-\dfrac{x_n}{n}\right)$.
   En déduire que :
$$x_n=\ln n-\frac{\ln n}{n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$