# TD n°18 - Intégration

**Exercice n°1 Savoir calculer une intégrale en repérant une primitive usuelle**

Justifier l'existence des intégrales suivantes puis les calculer :

$$I_1 = \int_{-2}^{3} (x^3 + x - 1)\,\mathrm{d}x \qquad I_4 = \int_1^2 \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \qquad I_7 = \int_0^5 t|t^2-1|\,\mathrm{d}t$$

$$I_2 = \int_3^{11} \sqrt{2x+3}\,\mathrm{d}x \qquad I_5 = \int_0^2 \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x$$

$$I_3 = \int_0^1 \frac{t^4}{\sqrt{t^5+3}}\,\mathrm{d}t \qquad I_6 = \int_1^e \frac{(\ln t)^2}{t}\,\mathrm{d}t$$

**Exercice n°2 Savoir calculer une intégrale par IPP**

Justifier de l'existence des intégrales suivantes puis les calculer à l'aide d'une IPP :

$$I_1 = \int_0^1 te^{2t}\,\mathrm{d}t \qquad I_3 = \int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

$$I_2 = \int_1^2 t\ln(t)\,\mathrm{d}t \qquad I_4 = \int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

**Exercice n°3 Savoir calculer une intégrale par changement de variable**

Justifier l'existence des intégrales suivantes puis les calculer à l'aide d'un changement de variable :

$$I_1 = \int_1^{4/3} \frac{x^2}{(3x-2)^2}\,\mathrm{d}x$$
en posant $t = 3x - 2$

$$I_2 = \int_1^2 \frac{e^{2x}}{1-e^x}\,\mathrm{d}x$$
en posant $t = e^x$

$$I_3 = \int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$
en posant $t = e^{\sqrt{x}}$

$$I_4 = \int_1^4 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$ en posant $t = \sqrt{x}$

**Exercice n°4 Calculs d'intégrales : primitive, linéarité, IPP**

L'objectif est de calculer les trois intégrales dont on admet l'existence :

$$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2}}, \qquad J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,\mathrm{d}x, \qquad K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,\mathrm{d}x.$$

1. **Calcul de $I$ :** Soit $f$ la fonction définie sur $[0;1]$ par :

$$\forall x \in [0;1], \quad f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+2}\right).$$

   (a) Calculer la dérivée de $f$.

   (b) En déduire la valeur de $I$

2. **Calcul de $J$ et $K$.**

   (a) Sans calculer explicitement les intégrales $J$ et $K$, vérifier que $J + 2I = K$.

   (b) A l'aide d'une IPP portant sur $K$, montrer que $K = \sqrt{3} - J$.

   (c) En déduire les valeurs de $J$ et $K$.

**Exercice n°5 Etudier une suite définie par une intégrale**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n e^t\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier l'existence de $I_n$.
2. Calculer $I_0$.
3. **Etude de la convergence, méthode n°1**

   (a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_n$.

   (b) Montrer que la suite $(I_n)$ est décroissante.
   Justifier que $(I_n)$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}_+$.

   (c) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = e - (n+1)I_n.$$

   (d) En raisonnant par l'absurde, justifier que $\ell = 0$.

4. **Etude de la convergence, méthode n°2**

   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0,1], \quad 0 \leq t^n e^t \leq et^n$.

   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_n \leq \dfrac{e}{n+1}$.

   (c) En déduire que $(I_n)$ converge et déterminer sa limite.

**Exercice n°6 Etudier des suites définies par des intégrales**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, on pose : $\quad I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$.

1. A l'aide d'un encadrement judicieux de $I_n$, justifier que $(I_n)$ converge et déterminer sa limite.
2. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = 1$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = nI_n$.

   (a) A l'aide d'une IPP, montrer que $J_n = \ln(2) - \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$.

   (b) Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $0 \leq \ln(1+t) \leq t$.

   (c) En déduire que $(J_n)$ converge et déterminer sa limite.

**Exercice n°7   Etudier une fonction définie par une intégrale**

On considère la fonction $\varphi$ définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad \varphi(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. (a) Montrer que $\varphi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ et déterminer $\varphi'(x)$.
   (b) En déduire les variations de $\varphi$.
2. (a) Montrer que, pour tout $t > 0$, on a $\dfrac{e^t}{t} \geq \dfrac{1}{t}$.
   (b) En déduire que, pour tout $x \in ]0,1]$, $\varphi(x) \leq \ln(x)$.
   (c) En déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x)$.
3. (a) Montrer que, pour tout $t > 0$, on a $e^t \geq \dfrac{t^2}{2}$.
   (b) En déduire que, pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\dfrac{x^2-1}{4} \leq \varphi(x)$.
   (c) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$.

**Exercice n°8   Etudier une fonction définie par une intégrale**

On considère la fonction $\Psi$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \Psi(x) = \displaystyle\int_x^{2x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\Psi$ est impaire.
2. Montrer que la fonction $\Psi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, préciser sa dérivée et donner le sens de variations de $\Psi$.
3. Montrer que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad xe^{-4x^2} \leq \Psi(x) \leq xe^{-x^2}$.
4. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \Psi(x)$ puis $\lim\limits_{x\to-\infty} \Psi(x)$.