TD n°19 - Espaces probabilisés

Exercice n°1 Séries et probabilités

On dispose d'une grille infinie dont les lignes sont numérotées $0, 1, 2, \ldots$ et les colonnes sont numérotées $0, 1, 2, \ldots$. On place un jeton au hasard sur cette grille et on note $A_{i,k}$:"Le jeton est placé en ligne i et colonne k".

On suppose que l'on a : $\forall i \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, P(A_{i,k}) = \dfrac{1}{e2^{k+1}i!}$.

1. Soit $i \in \mathbb{N}$. On considère L_i : "Le jeton est placé sur la ligne i".

   Ecrire L_i à l'aide des événements $A_{i,k}$ puis calculer $P(L_i)$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}$. On considère C_k : "Le jeton est placé sur la colonne k".

   Ecrire C_k à l'aide des événements $A_{i,k}$ puis calculer $P(C_k)$.

3. On considère D : "Le jeton est placé sur la diagonale de la grille".

   Ecrire D à l'aide des événements $A_{i,k}$ puis calculer $P(D)$.

Exercice n°2 Sujet type concours n°1

On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce de monnaie donnant Pile avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et Face avec la probabilité $q = 1 - p$.

On s'intéresse dans ce problème aux successions de lancers amenant un même côté.
On dit que la première série est de longueur $n \geq 1$ si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et $(n + 1)$-ième lancer l'autre côté. De même, la deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série et se termine (si elle se termine) au lancer précédant un changement de côté.

Par exemple, si on obtient "Pile, Pile, Pile, Face, Face, Pile,..."alors la longueur de la première série est 3 et celle de la seconde série est 2.

On considère $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ l'espace probabilisé associé aux successions infinies de Pile et Face. Pour $i \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, on note P_i l'événement "le i-ième lancer amène Pile".

1. On note A l'événement "la longueur de la première série est finie" et, pour $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, A_n l'événement "la longueur de la première série est n".
   (a) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, A_n à l'aide des événements P_i pour i variant entre 1 et $n + 1$.
   (b) En déduire que $\mathbb{P}(A_n) = p^n q + q^n p$.
   (c) Montrer que $\mathbb{P}(A) = 1$, commenter ce résultat.
2. On note B l'événement "la longueur de la deuxième série est finie" et, pour $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, B_n l'événement "la longueur de la deuxième série est n".
   (a) Exprimer l'événement $A_n \cap B_k$ à l'aide des P_i pour i variant entre 1 et $n+k+1$, puis calculer $\mathbb{P}(A_n \cap B_k)$.
   (b) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $\mathbb{P}(B_k) = p^2 q^{k-1} + q^2 p^{k-1}$.
   (c) Montrer que $\mathbb{P}(B) = 1$, commenter ce résultat.

Exercice n°3 Sujet type concours n°2

On lance indéfiniment une pièce équilibrée. On s'intéresse au rang du lancer auquel on obtient pour la première fois deux Pile consécutifs. On modélise cette expérience aléatoire par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On note alors X_n l'événement "On obtient pour la première fois, deux Piles consécutifs au n-ième lancer".

Par exemple, si on obtient dans cet ordre : Pile, Face, Face, Pile, Pile, Pile, Face,... alors X_5 se réalise.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, on pose les événements suivants :

- F_n : "Obtenir Face au n-ième lancer"
- P_n : "Obtenir Pile au n-ième lancer"

La suite $(P_n)_{n \geq 1}$ est donc une suite d'événements mutuellement indépendants.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, on pose les événements suivants :

- U_n : "Au cours des n premiers lancers, on obtient au moins une fois deux Piles consécutifs"
- $B_n = P_{n-1} \cap P_n$.

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, on note : $u_n = \mathbb{P}(U_n)$ et $a_n = \mathbb{P}(X_n)$.

1. (a) Exprimer les événements X_2, X_3 et X_4 en fonction des événements P_k et F_k. En déduire les valeurs de a_2, a_3 et a_4.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} a_k$.
2. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, on a
   $$\mathbb{P}(U_{n+1}) = \mathbb{P}(U_n) + \mathbb{P}(B_{n+1}) - \mathbb{P}(U_n \cap B_{n+1}).$$
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 4}$, on a :
   $$U_n \cap B_{n+1} = (U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}).$$
   (c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 4}$, on a :
   $$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}).$$
   (d) Démontrer que la suite $(u_n)_{n \geq 4}$ est croissante, puis qu'elle converge vers 1.
   (e) Interpréter ce résultat.

Exercice n°4 Sujet type concours n°3

Un mobile se déplace aléatoirement sur un axe dont l'origine est le point O d'abscisse 0.

- Au départ (instant 0), le mobile est situé sur le point O.
- Le mobile se déplace selon la règle suivante :
  - A l'instant 1, il se déplace de façon équiprobable sur l'un des points 0 ou 1 ;
  - A l'instant 2, il se déplace de façon équiprobable sur l'un des points 0, 1 ou 2 ;
  - A l'instant 3, il se déplace de façon équiprobable sur l'un des points 0, 1, 2, 3 ;
  - De façon générale, à l'instant n ($n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$), il se place de façon équiprobable sur l'un des points d'abscisses $0, 1, \ldots, n$.
- Pour tout $n, k \in \mathbb{N}$, on note $X_{n,k}$ l'événement “Le mobile est en k à l'instant n”.

1. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, et tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_{n,k})$.
2. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, Y_n l'événement “Le mobile revient pour la première fois à l'origine à l'instant n”.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, exprimer l'événement Y_n à l'aide des événements $X_{i,k}$.
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $\mathbb{P}(Y_n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.
   (c) Vérifier par le calcul que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y_n) = 1$.
3. (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$.
   (b) En déduire que, pour tout $j \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, $\ln(j) \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \leq \ln(j) + 1 - \frac{1}{j}$.
   (c) Conclure que : $\displaystyle\lim_{j \to +\infty} \left(\frac{1}{\ln(j)} \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \right) = 1$.
4. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, Z_n l'événement “Le mobile revient à l'origine pour la deuxième fois à l'instant n”.
   (a) Déterminer, pour tout $i \geq j$, la probabilité $\mathbb{P}_{Y_i}(Z_j)$.
   (b) Etablir que, pour tout $i \leq j-1$, $\mathbb{P}_{Y_i}(Z_j) = \dfrac{i+1}{j(j+1)}$.
   (c) Ecrire, pour tout $j \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, la probabilité $\mathbb{P}(Z_j)$ comme une somme finie.
   (d) En déduire $\displaystyle\lim_{j \to +\infty} \mathbb{P}(Z_j)$.