# TD n°19 - Polynômes

## L'ensemble $\mathbb{K}[X]$

**Exercice n°1 Résolution d'équation dans $\mathbb{K}[X]$ par analyse-synthèse**

1. **Avec les degrés :** Résoudre dans $\mathbb{K}[X]$ l'équation d'inconnue $P$ : $(P')^2 = 4P$.
2. **Avec les coefficients dominants :** Résoudre dans $\mathbb{C}[X]$ l'équation d'inconnue $P$ : $(X^2+1)P'' = 6P$.

**Exercice n°2 Utiliser le produit de polynômes**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P = (X+1)^n$.

1. Déterminer les coefficients de $P^2$ de deux manières différentes.
2. En déduire une nouvelle expression de $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$.

## Algèbre linéaire dans $\mathbb{K}[X]$

**Exercice n°3 Un peu de tout**

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. L'ensemble $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) = 3\}$ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les lois usuelles de $\mathbb{R}[X]$ ? Pourquoi ?
2. 
   - La famille $\mathscr{F} = (X-1;\, X+1;\, X^2-1)$ est-elle libre dans $\mathbb{R}[X]$ ?
   - Qu'en est-il de la famille $\mathscr{F} \cup \{1\}$ ?
   - La famille $\mathscr{F}$ est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$ ? Justifier.
   - Déterminer les coordonnée de $Q = X^2$ dans la famille $\mathscr{F}$.

**Exercice n°4 Etudier une application linéaire n°1**

Pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on pose $\varphi(P) = P + (1-X)P'$.

1. Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Calculer $\varphi(X^k)$ pour tout $k \in \{0,1,2,3\}$.
3. Donner une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$.
   L'application $\varphi$ est-elle surjective ? Injective ?
4. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
5. Montrer que $\mathbb{R}_3[X] = \mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathrm{Im}(\varphi)$.

**Exercice n°5 Etudier une application linéaire n°2**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on définit l'application $\varphi : P(X) \longmapsto P(X+1) - P(X)$.

1. Qui est $\varphi$ dans le cas où $n = 0$ ? A partir de maintenant, on suppose que $n \geq 1$.
2. Montrer que, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $\varphi(P) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
3. Montrer que $\varphi$ est linéaire.
4. Soit $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(k) = P(0)$.
   Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$. L'application $\varphi$ est-elle injective ? Surjective ?
5. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$, tel que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi^p(P) = 0_{\mathbb{R}[X]}$ où $\varphi^p = \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{p \text{ fois}}$.

**Exercice n°6 Etudier une application linéaire n°3**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $XP' + P = Q$.

## Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

**Exercice n°7 Savoir effectuer une division euclidienne**

1. Effectuer les divisions euclidiennes de $P$ par $Q$, où $P$ et $Q$ sont les polynômes suivants :
   (a) $P = X^5$, $Q = X^3 + 1$.
   (b) $P = X^4 + X^3$, $Q = X^2 - 1$.
2. Déterminer les réels $\lambda$ et $\mu$ pour lesquels $X^2 + 2$ divise $X^4 + \lambda X^3 + \mu X^2 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

**Exercice n°8 Déterminer les racines complexes d'un polynôme**

Déterminer les racines complexes des polynômes suivants :

1. $P = X^3 + X^2 - 2$.
2. Pour $a \in \mathbb{C}$, $Q = X^4 + aX^3 + X + a$.
3. $R = X^4 + 2X^2 + 1 - i$.

**Exercice n°9 Utiliser la formule de Taylor et la division euclidienne**

1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
   Justifier que la famille $\left((X-a)^k\right)_{k \in [\![0;\, n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Quelles sont les coordonnées de $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base ?
   Si $n = 3$ et $a = 2$, donner les coordonnées de $P = X^2$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une base et la dimension des espaces vectoriels suivants :
   (a) $F_1 = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = 0\}$
   (b) $F_2 = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P'(1) = P''(1) = 0\}$.

**Exercice n°10 Utiliser les critères de nullité d'un polynôme**

Les deux questions sont indépendantes.

1. **Polynômes interpolateurs :** Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts.
   On considère l'application $\varphi$ définie par :
   $$\left\{ \begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ & P & \longmapsto & (P(a_0), \ldots, P(a_n)) \end{array} \right.$$
   (a) Montrer que $\varphi$ est linéaire.
   (b) Justifier que $\varphi$ est injective.
   (c) Que peut-on en déduire ? Interpréter graphiquement.

2. Déterminer l'ensemble des polynômes périodiques.

**Exercice n°11 Déterminer l'ordre de multiplicité d'une racine**

Les deux questions sont indépendantes :

1. (a) Déterminer une racine évidente $\alpha$ du polynôme $P(X) = X^5+3X^4+5X^3+7X^2+6X+2$. Déterminer son ordre de multiplicité $r$.
   (b) Diviser $P$ par $(X-\alpha)^r$. Factoriser entièrement $P$ dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.
   (c) Déterminer tous les polynômes $A \in \mathbb{R}[X]$ qui divisent $P$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Soit $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$. Montrer que $P_n$ n'a pas de racine multiple dans $\mathbb{C}$.

**Exercice n°12 Factoriser des polynômes dans $\mathbb{C}[X]$**

1. Soit $P = X^3 + (1+i)X^2 + (1+i)X + i$.
   (a) Justifier que $P$ est scindé dans $\mathbb{C}[X]$.
   (b) Déterminer la factorisation de $P$ en produit de facteurs irréductibles.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $P = (X+1)^n - (X-1)^n$.
   (a) Déterminer le degré de $P$ et son coefficient dominant.
   (b) Déterminer ses racines complexes et en déduire sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$.

**Exercice n°13 Factoriser des polynômes dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$**

Factoriser les polynômes réels suivants dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$, en produits de facteurs irréductibles

$A = 4X^3 - 3X + 1 \qquad B = X^3 - 1 \qquad C = X^6 + 2X^3 + 1 \qquad D = 4X^4 + 1$

$E = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 \qquad F = X^6 + 1$

**Exercice n°14 Utiliser les relations coefficients-racines**

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Rappeler quelles sont les racines de $X^n - 1$.
   Calculer la somme de ces racines puis leur produit.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $a \in \mathbb{R}$.
   Déterminer les racines du polynôme $P = (X+1)^n - e^{i2na}$.
   En déduire la valeur du produit : $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$.

## Applications diverses

**Exercice n°15 Calcul des puissances d'une matrice**

Soit $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

1. On considère le polynôme de $\mathbb{R}[X]$, $P = X^2 - 5X + 6$.
   Vérifier que $P(B) = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$. On dit que $P$ est un polynôme annulateur de $B$.
2. En déduire que $B$ est inversible et trouver $B^{-1}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Quel est le degré du reste de la division de $X^n$ par $P$ ? Déterminer ce reste.
4. En déduire une expression de $B^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice n°16 Polynômes de Tchebychev**

On définit une suite de polynômes par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.

1. Déterminer le degré ainsi que le coefficient dominant de $T_n$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe au plus un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que :
$$(\star): \quad \forall \theta \in \mathbb{R},\ P(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$
3. Montrer que $T_n$ est l'unique polynôme vérifiant la relation $(\star)$.
4. Déterminer les racines de $T_n$.
5. Déterminer des relations similaires à celle de ka question 2. pour $T_n'$ et $T_n''$.
   En déduire une équation différentielle linéaire d'ordre deux vérifiée par $T_n$.
6. Déterminer les racines de $T_n'$ et sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.