TD n°19 - Variables aléatoires discrètes

Exercice n°1 Déterminer le support et la loi d'une VA discrète finie

Pour chaque variable aléatoire X, donner $X(\Omega)$ et la loi de X.

1. X_1 est le minimum de deux dés à six faces équilibrés.
2. X_2 est le nombre de "Piles" obtenus en lançant une pièce équilibrée trois fois de suite. Faire de même lorsqu'on lance la pièce 10 fois de suite.
3. On considère deux urnes : l'urne 1 contient deux boules noires et deux boules blanches, et l'urne 2 contient trois boules noires et une boule blanche. On choisit au hasard une urne puis on extrait successivement avec remise deux boules de cette urne. X_3 est la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées.

Exercice n°2 Etudier une variable aléatoire discrète finie

Les deux questions sont indépendantes :

1. On considère une variable aléatoire X prenant les valeurs $0, 1, 2$ et 3.
   On donne $P(X=0) = \dfrac{1}{10}$ et $P(X=1) = \dfrac{1}{2}$.
   (a) Sachant que les événements $[X = 2]$ et $[X = 3]$ ont la même probabilité, Déterminer la loi de X.
   (b) Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
2. On pioche successivement deux boules, sans remettre la première boule, dans une urne contenant 5 boules numérotées de 1 à 5. On note X la valeur absolue de la différence des deux numéros obtenus.
   (a) Donner $X(\Omega)$ et la loi de X.
   (b) Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice n°3 Existence et calcul de l'espérance d'une VA discrète infinie

On considère des lancers successifs et indépendants d'un dé équilibré et on note X le nombre de lancers de dés nécessaires pour obtenir un "1" ou un "2", et 0 si aucun "1" ni aucun "2" n'est obtenu.
On considère les événements U_i : "Le i-ème lancer donne un "1"ou un "2"".

1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. Ecrire les événements $[X = 0]$ et $[X = k]$, pour $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, à l'aide des U_i.
3. Déterminer la loi de X.
4. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = 1$.
5. La variable aléatoire X possède-t-elle une espérance ? Si oui, la calculer.
6. La variable aléatoire X possède-t-elle une variance ? Si oui, la calculer.

Exercice n°4 Existence et calcul de l'espérance d'une VA discrète infinie

Une urne contient initialement deux boules, l'une noire et l'autre blanche. On tire une à une des boules dans cette urne en suivant le protocole suivant :

- Si la boule tirée est noire, on la remet dans l'urne avant le tirage suivant ;
- Si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et l'on ajoute une boule blanche avant le tirage suivant.

On note X le rang du tirage de la première boule noire et 0 si à chaque tirage une boule blanche est obtenue.
On considère les événements N_i : "La i-ème boule tirée est noire".

1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. Ecrire les événements $[X = 0]$ et $[X = k]$, pour $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, à l'aide des N_i.
   En déduire la loi de X.
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = 1$.
4. La variable aléatoire X possède-t-elle une espérance. Si oui, la calculer.

Exercice n°5 Etudier une variable aléatoire discrète infinie

Un sauteur essaye successivement les hauteurs $1, 2, \ldots, n, \ldots$ jusqu'à ce qu'il échoue. Il a une probabilité $\dfrac{1}{n}$ de réussir son saut à la hauteur n.
On note X la hauteur du dernier saut réussi. On suppose qu'il finit nécessairement par échouer et que les sauts sont indépendants.

1. Déterminer $X(\Omega)$ ainsi que la loi de X.
2. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) = 1$.
3. Montrer que X possède une espérance et la calculer.
4. Montrer que X admet une variance et la calculer.

Exercice n°6 Etudier une variable aléatoire discrète infinie

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^{\geq 1}$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $P(X = k) = a3^{-k}$.

1. Trouver a pour que l'on définisse ainsi la loi d'une variable aléatoire.
2. Montrer que X admet une espérance puis la calculer. Faire de même pour la variance.
3. Les variables $Y = 2^X$ et $Z = 4^X$ admettent-elles une espérance ? Si oui, les calculer.

Exercice n°7 Etude de la VA discrète infinie : premier rang pile-face

On réaliser une suite de lancers d'une pièce équilibrée.

On note les événements :

- P_i : "on obtient pile au i-ème lancer"
- F_i : "on obtient face au i-ème lancer".

Pour ne pas surcharger l'écriture, on écrira, par exemple, P_1F_2 à la place de $P_1 \cap F_2$.

On note X le rang où apparaît pour la première fois le résultat pile puis face dans cet ordre. Par exemple, si les premiers lancers donnent $FFPF$ alors $X = 4$. La variable aléatoire X prend la valeur 0 si l'on obtient jamais une telle succession.

1. (a) Calculer $P(X = 2)$.
   (b) En remarquant que $[X = 3] = P_1P_2F_3 \cup F_1P_2F_3$, calculer $P(X = 3)$.
   (c) Sur le modèle de la question précédente, écrire, pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geq 3}$, l'événement $(X = k)$ comme réunion de $(k-1)$ événements incompatibles.
   (d) Déterminer $P(X = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geq 2}$.
   (e) Calculer $P(X = 0)$.
2. On se propose, dans cette question, de retrouver les résultats précédents par une autre méthode.
   (a) Montrer que, k désignant un entier supérieur ou égal à 3, si le premier lancer est pile alors $(X = k)$ se réalise si et seulement si $P_2P_3 \dots P_{k-1}F_k$ se réalise.
   (b) En déduire, en utilisant la formule des probabilités totales que, pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geq 3}$,
   $$P(X = k) = \frac{1}{2}P(X = k-1) + \frac{1}{2^k}.$$
   (c) On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, $u_k = 2^k P(X = k)$.
   Monter que la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^{\geq 2}}$ est arithmétique.
   Retrouver alors $P(X = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geq 2}$.
3. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

Exercice n°8 Etude de la VA discrète infinie : premier rang pile-pile

On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée dont la probabilité d'obtenir pile vaut p et celle d'obtenir face vaut q $(p + q = 1)$. On lance indéfiniment la pièce et on note X le rang où apparaît pour la première fois deux résultats pile consécutifs. Par exemple, si les premiers lancers donnent $FPFFPFPP$ alors $X = 8$. On suppose que les lancers sont mutuellement indépendants.
On considère les événements :

- P_i : "on obtient pile au i-ème lancer";
- F_i : "on obtient face au i-ème lancer".

1. Calculer en fonction de p et q :
   $$P(X = 2), \qquad P(X = 3), \qquad P(X = 4)$$
2. Justifier que $\{F_1, P_1 \cap F_2, P_1 \cap P_2\}$ est un système complet d'événements.
3. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$,
   $$P(X = k+2) = qP(X = k+1) + pqP(X = k).$$
4. On suppose que $p = \dfrac{2}{3}$.
   (a) Etablir que, pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$,
   $$P(X = k+1) = \frac{4}{9}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^k - \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right].$$
   (b) Montrer que X admet une espérance.
   (c) Montrer que X admet un moment d'ordre 2. Calculer $E(X(X-1))$, puis en déduire la variance de X.