TD n°1 - Premières fonctions usuelles, (in)équations

Exercice n°1 Manipulation des fractions

Simplifier les fractions suivantes :

a) $\frac{\frac{3}{2}}{3}$ b) $\frac{3}{\frac{2}{3}}$ c) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{7}$ d) $\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{3}\right)\times\left(3+\frac{7}{4}\right):\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{6}\right)$ e) $\frac{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}\times\frac{4}{3}+\frac{1}{3}}$

Exercice n°2 Représenter graphiquement une fonction affine

On considère les fonctions affines : $f : x \mapsto 2x-1$, $g : x \mapsto -x+2$ et $h : x \mapsto 5$.

1. Dans un même repère, tracer **proprement** une représentation des fonctions f, g et h.
2. Résoudre graphiquement les (in)équations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivantes :

$$(E) : 2x-1=5 \qquad (I_1) : 2x-1<-x+2 \qquad (I_2) : -x+2 \leq 2x-1 \leq 5$$

Exercice n°3 Résolution algébrique d'(in)équations du premier degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes :

$$(E_1) : 5x-9=3x+4 \qquad (E_2) : \frac{4}{5}x+4=-\frac{2}{3} \qquad (I_1) : -6x+3<0 \qquad (I_2) : -x+1 \leq 2x-\frac{1}{2}$$

Exercice n°4 Factoriser en repérant un facteur commun

Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser les expressions suivantes en repérant un facteur commun :

$$A(x) = (2x-5)(7+3x)-(2x-5)(3x-2)$$
$$B(x) = (2x+1)^3+(2x+1)^2+2x+1$$
$$C(x) = (2x-6)(x+2)-(x+1)(x-3)+2x(3-x)$$

Exercice n°5 Factoriser à l'aide d'une identité remarquable

1. Rappeler les trois identités remarquables vues au lycée.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser les expressions suivantes en utilisant les identités rappelées :

$$A(x) = x^2-1$$
$$B(x) = 8x^2-32$$
$$C(x) = (2x-1)^2-(3-5x)^2$$
$$D(x) = (x-3)(3x+5)+9x^2+30x+25$$
$$E(x) = x^4-1$$

Exercice n°6 Factoriser un trinôme du second degré

Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer les racines des trinômes suivants et donner leur factorisation :

$$A(x) = x^2+5x+6$$
$$B(x) = x^2+x+1$$
$$C(x) = -2x^2+3x+1$$

Exercice n°7 Equation du second degré avec un paramètre

Soit m un paramètre réel. Résoudre, en fonction de m, l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(E_m) : \; mx^2+(2m-1)x-2=0.$$

Exercice n°8 Résolution d'(in)équations

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

   Les équations marquées de $\star$ sont à résoudre SANS utiliser le discriminant

$$(E_1^\star) : x^3+6x=-2x^2+5x \qquad (E_4) : \frac{x+2}{x+1}+4=\frac{5x}{x+2}$$
$$(E_2^\star) : 3x^2=7 \qquad (E_5) : \frac{7x-5}{x^2+2x+1}=1$$
$$(E_3^\star) : (x+1)^2=16 \qquad (E_6) : x^2-3x+4+\frac{8-6x}{x^2-2}=0$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(I_1) : x^2+2x+5 \leq -x+15 \qquad (I_4) : x^3+5x \leq 6x$$
$$(I_5) : (x+1)^2 \geq 16$$
$$(I_2) : 3x^2-4x-4 \leq 2x^2-17 \qquad (I_6) : \frac{x+2}{x+1}+4 \leq \frac{5x}{x+2}$$
$$(I_3) : 3x^2-4x-4 > 2x^2-17$$

Exercice n°9 Ecrire une expression sans valeur absolue

Ecrire sans valeur absolue les quantités suivantes où $x \in \mathbb{R}$.

1. $|x+1|+|x+2|$
2. $|x^2-1|-|x^2+1|+|2x^2-x+1|$

Exercice n°10 Représenter le graphe d'une fonction faisant intervenir $|\cdot|$

1. Tracer avec grand soin le graphe de la fonction $x \mapsto |x+4|-|2x-6|$.
2. Tracer avec grand soin le graphe de la fonction $x \mapsto |x+2|-|x^2-1|$.
3. Soit $f : x \mapsto x^2-1$ définie que $\mathbb{R}$.
   (a) Représenter sur un même graphique la courbe représentative de f et celle de $-f$.
   (b) En déduire une représentation de $|f|$.
   (c) Comment, connaissant le graphe d'une fonction f, peut obtenir le graphe de $|f|$?

Exercice n°11 Résoudre algébriquement et géométriquement des (in)équations faisant intervenir $|\cdot|$

1. On considère les (in)équations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivantes :

   (a) $|x+2|=0$, (b) $|x-3|=1$, (c) $|x+3|=|x+7|$, (d) $|x-5| \leq 4$, (e) $|-x+3|>5$

   Résoudre géométriquement puis algébriquement chacune de ces (in)équations.

2. Résoudre algébriquement les (in)équations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivantes :

$$\text{(a) } |3x-8| \leq 20, \qquad \text{(b) } |x^2-1| \geq 3, \qquad \text{(c) } |2x+7| \geq 4.$$

Exercice n°12 Résoudre une équation par disjonction de cas

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes par disjonction de cas :

$$(E) :\ |1-x^2| = |1+x|, \qquad (I) :\ |x+1| \leq |2x+1| + 1$$

Exercice n°13 Utiliser les inégalités triangulaires

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x| \leq 1$ et $|y| \leq 3$. Montrer que : $|2x+3y| \leq 11$.
2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x| \geq 2$ et $|y| \leq 1$. Montrer que : $|x+y| \geq 1$.
3. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x| \geq \dfrac{1}{2}|y|$. Montrer que : $|x+y| \geq \dfrac{1}{2}|y|$.