TD n°1 - Méthodes en analyse

Inégalités dans $\mathbb{R}$

Exercice n°1 Manipuler des inégalités

Soient x et y deux réels tels que $2 \leq x \leq 4$, $-5 \leq y \leq -3$.
Déterminer un encadrement de $x+y$, $x-y$, $x \times y$ et $\frac{x}{y}$.

Exercice n°2 Résoudre des inéquations avec des quotients

Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

a) $\dfrac{2x-1}{x^2-1} \geq 1$ b) $\dfrac{x+5}{x^2+1} \geq 1$

Exercice n°3 Etablir une inégalité

Soit $x \in]0,1[$. Montrer que, pour tout $t \in [0,x]$, $\dfrac{x-t}{1-t} \leq x$.

Exercice n°4 Résoudre des inéquations avec racines carrées

a) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}_+$. Etudier l'implication entre les inégalités : $\sqrt{b} \leq a$ et $b \leq a^2$
Compléter : $\sqrt{b} \leq a \iff [b \leq a^2 \text{ ET } \ldots]$

b) On veut résoudre l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $\sqrt{1-x} \leq x+1$.

Géométriquement : à l'aide de votre calculatrice, conjecturer les solutions de cette inéquation.
Algébriquement: résoudre cette inéquation par une suite d'équivalences.

c) *Autres exercices:* résoudre les inéquations : $\sqrt{2x-x^2} \leq x-1$ et $x \leq \sqrt{2-x^2}$.

Exercice n°5 Résoudre des (in)équations avec valeurs absolues

a) *Géométriquement :* Résoudre, sans calcul et en utilisant uniquement la droite numérique, les (in)équations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$|x-1| = 1 \qquad |x+1| \geq 2 \qquad |x-1| \leq |x-2|$$

b) *Algébriquement:* Résoudre, les (in)équations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$|1-x^2| = |1+x| \qquad |x+1| \leq |2x+1|+1 \qquad |x^2-2| \leq |x|$$

Exercice n°6 Montrer des inégalités classiques

a) Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad xy \leq \dfrac{x^2+y^2}{2}$.
En déduire que : $\forall a, b \geq 0, \quad \sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$ et $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad |ab| \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$.

b) Montrer que : $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad |a|+|b| \leq |a-b|+|a+b|$.

c) Montrer que : $\forall x, y \geq 0, \quad \sqrt{x+y} \leq \sqrt{x}+\sqrt{y}$.
En déduire que : $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{|a-b|} \geq \sqrt{|a|}-\sqrt{|b|}$.

Exercice n°7 Etablir par récurrence une inégalité

a) Etudier la proposition $n^2 \leq 2^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 1+nx \leq (1+x)^n$.

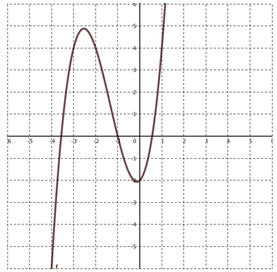
c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|$.

Généralités sur les fonctions

Dans les exercices qui suivent, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

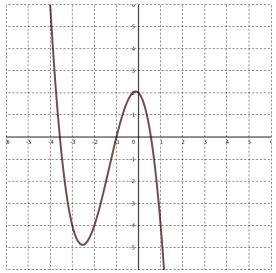
Exercice n°8 Compositions élémentaires et courbes représentatives

- On a représenté ci-contre la fonction f. Préciser parmi les représentations graphiques ci-dessous, celle de :

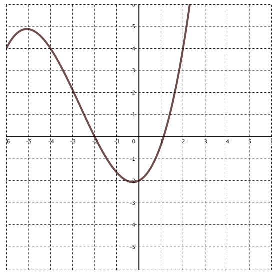


a) $x \longmapsto f(-x)$ b) $x \longmapsto f\left(\dfrac{x}{2}\right)$ c) $x \longmapsto -f(x)$

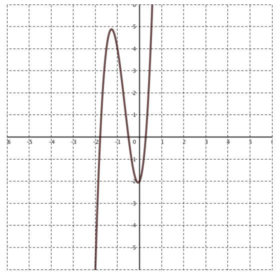
d) $x \longmapsto f(x-1)$ e) $x \longmapsto f(1-x)$ f) $x \longmapsto f(2x)$



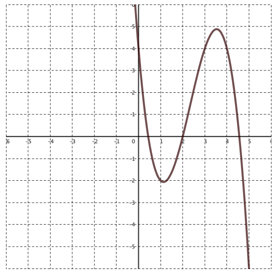
graphique n°1



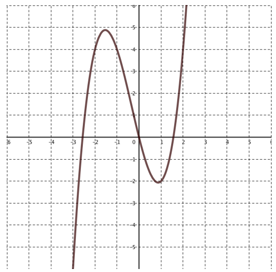
graphique n°2



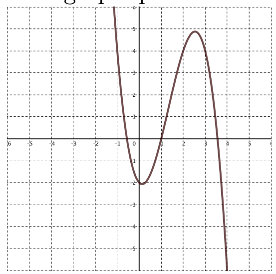
graphique n°3



graphique n°4



graphique n°5



graphique n°6

Exercice n°9 Extremum d'un trinôme du second degré, représentation graphique

Soit $f : x \longmapsto x^2 - 2x - 1$.

1. Mettre f sous forme canonique, puis justifier que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$ que vous préciserez.
2. En déduire la composée des transformations permettant de passer de la parabole d'équation $y = x^2$ à la courbe de f.
3. Répondre aux mêmes questions (enfin presque...) sur l'exemple : $f : x \longmapsto -3x^2 - 2x + 1$.

Exercice n°10 Etudier la parité et le caractère borné d'une fonction

Etudier la parité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|}$. Montrer que cette fonction est bornée.

Etudes de fonctions

Exercice n°11 Etudier une fonction sans dérivation

On considère les fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1-x}{1+x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$.

1. Peut-on écrire f comme une composée de fonctions élémentaires ?
2. Ecrire f sous la forme $a + \dfrac{b}{1+x}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.
   Peut-on écrire f comme une composée de fonction élémentaires ?
3. Etablir le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice n°12 Toujours sans dérivation, utilisation d'une symétrie

On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{e^x}{e^x - 1}$,sa courbe représentative est noté $\mathscr{C}_f$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f et les limites aux bords de D.
2. a) Justifier que f n'est ni paire, ni impaire.
   b) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $f(x) + f(-x) = 1$.
   En déduire une symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$ (utiliser votre calculatrice pour la conjecturer).
   c) Sur quel domaine suffit-il d'étudier la fonction f ?
3. a) Peut-on écrire f sous la forme d'une composée de fonctions ?
   Dans le cas contraire, trouver une forme de f permettant de l'écrire comme une composée.
   b) Sans calcul, dresser alors le tableau de variations de f.

Exercice n°13 Calculer une dérivée, déterminer un ensemble de dérivabilité

1. Sans se soucier des ensembles de dérivabilité :

$$f_1 : x \mapsto x\ln x - x \quad f_2 : x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x}} \quad f_3 : x \mapsto \frac{e^x}{\ln x} \quad f_4 : x \mapsto \frac{xe^x}{1+\ln x} \quad f_5 : x \mapsto (x^3+x-2)^4$$

$$f_6 : x \mapsto \exp(\sin x) \quad f_7 : x \mapsto \ln(1-e^{-x}) \quad f_9 : x \mapsto \ln(\ln x) \quad f_{10} : x \mapsto \sqrt{x^2-5x+6}$$

$$f_{11} : x \mapsto \cos(x^2)\sin(3x) \quad f_{12} : x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad f_{13} : x \mapsto \left(\cos^2 x + \frac{3}{2}\right)\sin(2x)$$

2. Préciser l'ensemble de dérivabilité de f_1, f_4, f_9, f_{10}, f_{11} et f_{12}.

Exercice n°14 Etude de fonctions avec la dérivation

Dans chacun des cas suivants, étudier complètement (graphe compris) la fonction f (commencer par réduire le domaine d'étude dans le cas où f est paire ou impaire) :

$$f : x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad g : x \mapsto x^2\sqrt{1-x^2} \qquad h : x \mapsto x(1-e^x)$$

Exercice n°15 Etude d'une fonction par double dérivation

On considère les fonctions $f : x \mapsto e^x \ln(1+e^x)$ et $g : x \mapsto x\ln(1+x)$.
Etudier entièrement la fonction g, puis la fonction f, sur leur ensemble de définition (*pour g lire l'intitulé !*).

Applications des études de fonctions

Exercice n°16 Utiliser une étude de fonction pour établir une inégalité

1. A l'aide d'une étude de fonction montrer l'inégalité suivante qui sera à connaître :
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x+1 \leq e^x$. Interpréter graphiquement ce résultat.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) \leq x-1$. Interpréter graphiquement ce résultat.
3. **Application : calculs de limites**
   a) Déduire de l'inégalité montrée précédemment que : Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(\sqrt{x}) < \sqrt{x}$.
   b) En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, puis que $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$.

Exercice n°17 Encore une étude de fonction pour établir une inégalité

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $\sin x \leq x$.
2. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.

Exercice n°18 Utiliser une étude de fonction pour étudier une équation

1. On considère la fonction f définie par $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x}$.
   a) Faire l'étude complète (graphe compris) de la fonction f.
   b) Déterminer, selon la valeur de $k \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions de l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $\ln x - kx = 0$.
2. Résoudre cette équation pour $k = \ln(\sqrt{2})$.

Propriétés des fonctions $\exp$, $\ln$

Exercice n°19 Résoudre des (in)équations avec $\exp$ ou $\ln$

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x - 1 = 2e^{-x} \iff e^{2x} - e^x - 2 = 0$.
   Résoudre alors ces équations.
2. On souhaite résoudre les deux inéquations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(E_1) \;:\; \ln\left(\frac{x+1}{2x+1}\right) \leq 1 \qquad (E_2) \;:\; \ln(x+1) - \ln(2x+1) \leq 1$$

   a) Déterminer les ensembles de résolution des inéquations (E_1) et (E_2).
   b) Peut-on écrire : $(E_1) \iff (E_2)$?
   c) Résoudre l'une des deux équations (laquelle ?), puis en déduire les solutions de l'autre.

Exercice n°20 Déterminer des limites en utilisant les croissances comparées

1. Calculer les limites suivantes :
   a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xe^x - x^2$ b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x^2-e^x}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x}}{x^2-e^x}$
2. Calculer rigoureusement $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (e^x - x\ln x)$.
   (On pourra, par exemple, utiliser que, pour tout $x > 0$: $\ln x \leq x$).

Fonctions trigonométriques

Exercice n°21 Utiliser le formulaire de trigonométrie, résoudre des (in)équations

1. Rappeler la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$. En déduire $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ telle que l'expression $\dfrac{\sin(3x)}{\sin x}$ soit bien définie.
   L'exprimer autrement (faire disparaître le quotient).
3. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:
   (a) $\sin(x) + \sin(2x) = 0$; $\cos(3x) - \cos(2x) = 0$
   (b) $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = 0$; $(\sqrt{3}+1)\cos(2x) + (\sqrt{3}-1)\sin(2x) = 2\sqrt{2}$
   (Pour la seconde équation voir question n°1)
4. En partant de la gauche, montrer que :

$$\cos x \sin x + \frac{\sqrt{3}-1}{2}\cos^2 x \leq \frac{\sqrt{3}+1}{2}\sin^2 x \Longleftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{1}{2}$$

   En déduire l'ensemble des solutions de cette inéquation.

Exercice n°22 Etude d'une fonction trigonométrique

On considère la fonction f définie par $x \longmapsto \dfrac{\cos(2x)}{\sin x}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f. Réduire le domaine d'étude.
2. Etudier la dérivabilité de f, puis dresser le tableau de variation sur une période.
3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.
4. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $\cos(2x) = \sin x$. Qu'obtient-on vis-à-vis de f ?

Exercice n°23 Etablir une inégalité

Montrer que, pour tout $x \in [0;\pi]$: $e^x \sin x \leq \dfrac{e^{\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$.