TD n°1 - Fonctions polynômes et rationnelles

Exercice n°1 Racine et signe d'un polynôme du premier degré

Dans chacun des cas suivants, déterminer la racine puis le signe du polynôme :

$$f(x) = 2x - 13 \qquad g(x) = -\frac{4}{15}x + \frac{2}{-3} \qquad h(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1-2x}{3}$$

puis résoudre $f(x) \geq 0$, $g(x) < 0$ puis $h(x) \leq 0$.

Exercice n°2 Racine et signe d'un polynôme du second degré

On considère les fonctions du second degré : $f : x \mapsto x^2 + 5x + 6$, $g : x \mapsto x^2 + x + 1$ et $h : x \mapsto -2x^2 + 3x + 1$.

1. Déterminer les racines des trinômes $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$, leur factorisation et donner leur signe.
2. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les inéquations $f(x) > 0$, puis $g(x) < 0$ et enfin $h(x) \geq 0$.

Exercice n°3 Factoriser une expression polynomiale

1. **Factoriser les expressions suivantes en repérant un facteur commun**

   Soit $x \in \mathbb{R}$. :

   $$A(x) = (2x-5)(7+3x) - (2x-5)(3x-2)$$
   $$B(x) = (2x+1)^3 + (2x+1)^2 + 2x + 1$$
   $$C(x) = (2x-6)(x+2) - (x+1)(x-3) + 2x(3-x)$$

   Déduire le signe de chacune de ces expressions.
2. **Factoriser à l'aide d'une identité remarquable**
   (a) Rappeler les trois identités remarquables vues au lycée.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser les expressions suivantes en utilisant les identités rappelées :

   $$A(x) = x^2 - 1 \quad B(x) = 8x^2 - 32 \quad C(x) = (2x-1)^2 - (3-5x)^2$$
   $$D(x) = (x-3)(3x+5) + 9x^2 + 30x + 25 \quad E(x) = x^4 - 1$$

Exercice n°4 Mettre sous un même dénominateur les expressions suivantes

$$A(x) = \frac{3}{x+4} + \frac{2}{x-2} \text{ pour } x \in \mathbb{R} - \{-4, 2\} \quad B(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{5}{x} \text{ pour } x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

$$C(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1+x}{(x-1)^2} \text{ pour } x \in \mathbb{R} - \{1\}$$

$$D(x) = \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} - \frac{x-1}{x(x+2)(x+3)} \text{ pour } x \in \mathbb{R} - \{-3, -2, -1, 0\}$$

Déduire le signe de chacune de ces expressions.

Exercice n°5 Savoir réaliser une division euclidienne de polynômes

1. Effectuer la division euclidienne de $x^3 + 2x^2 - 7x + 4$ par $x - 1$.
   En déduire l'écrire "en ligne" de cette division euclidienne.
2. Effectuer la division euclidienne de $2x^3 + 2x^2 - x + 6$ par $x + 2$.
   En déduire l'écrire "en ligne" de cette division euclidienne.

Exercice n°6 Savoir factoriser un polynôme

Factoriser "au maximum" les polynôme suivants :

(a) $x^3 - x^2 + x - 6$ (b) $6x^3 + 7x^2 - x - 2$ (c) $x^4 + x^3 - 7x^2 - 13x - 6$ (d) $x^6 - 1$

Exercice n°7 Savoir résoudre des (in)équations polynomiales

1. On considère le polynôme P défini par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = 9x^3 + 3x^2 - 8x - 4$.
   (a) Déterminer une racine évidente de P, puis le factoriser.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$ et déterminer le signe de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. On considère le polynôme Q défini par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = 7x^3 - 24x^2 - 19x + 12$.
   (a) Déterminer une racine évidente de Q, puis le factoriser.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x) = 0$ et déterminer le signe de $Q(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°8 Résolution algébrique d'(in)équations avec la fonction carrée

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes :

$$(E_1) : 9x^2 = 45 \quad (E_2) : (x-1)^2 = -7^2 \quad (E_3) : 3(x-1)^2 + 4 = \frac{13}{3} \quad (I_1) : 16x^2 \geq 8 \quad (I_2) : (x-2)^2 < 4$$

Exercice n°9 (In)équations se ramenant au second degré

On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = x^4 + x^2 - 6$ et la fonction g, définie sur $\mathbb{R}_+$, par $g(x) = x + \sqrt{x} - 6 = 0$.

1. Factoriser le polynôme $X^2 + X - 6$ pour $X \in \mathbb{R}$.
2. Résoudre $f(x) = 0$, puis $g(x) = 0$.
3. Résoudre $f(x) \geq 0$, puis $g(x) < 0$.

Exercice n°10 Equation du second degré avec un paramètre

Soit m un paramètre réel. Résoudre, en fonction de m, les équations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(E_m) : \; mx^2 + (2m-1)x - 2 = 0 \qquad (F_m) : \; x^2 + mx + 1 = -2m$$

Exercice n°11 Résolution d'(in)équations

Soit $x \in \mathbb{R}$. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$(E_1) : x^3 + 6x = -2x^2 + 5x$ sur $\mathbb{R}$

$(E_2) : \dfrac{x+2}{x+1} + 4 = \dfrac{5x}{x+2}$ sur $\mathbb{R} - \{-2, -1\}$

$(E_4) : (x^2-1)^2 = (x+1)^2$ sur $\mathbb{R}$

$(I_1) : (2x+2)(2x+1) > -16x - 8$ sur $\mathbb{R}$

$(I_2) : x^3 - 2x + 5 \leq x + 3$ sur $\mathbb{R}$

$(I_3) : \dfrac{2x}{x^2-1} \leq x$ sur $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Exercice n°12 Utiliser le principe d'identification des polynômes

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère le polynôme f défini par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 - 7x^2 + 11x - 2$.

   Par identification, déterminer trois réels a, b et c à déterminer tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c).$$

2. On considère le polynôme f défini par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^4 - 2x^3 - 17x^2 + 4x + 30$.

   Par identification, déterminer deux réels a et b à déterminer tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (x^2-2)(x^2 + ax + b).$$

Exercice n°13 Utiliser le principe d'identification des polynômes

1. On considère la fonction rationnelle f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-3, 0, 2\}, \quad f(x) = \frac{2x^2 - 16x - 6}{x^3 + x^2 - 6x}.$$

   En raisonnant par identification, déterminer trois réels a, b et c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-3, 0, 2\}, \quad f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+3}.$$

2. On considère la fonction rationnelle f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \quad f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}.$$

   En raisonnant par identification, déterminer trois réels a, b et c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \quad f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}.$$