TD n°20 - Variables aléatoires discrètes

Variables aléatoires réelles discrètes

Exercice n°1 Calculer l'espérance et la variance d'une VAR discrète

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = a5^{-k}$.

1. Trouver a pour que l'on définisse ainsi la loi d'une variable aléatoire.
2. Montrer que X admet une espérance puis la calculer.
3. Montrer que X admet une variance puis la calculer.

Exercice n°2 Etude d'une VAR discrète

Un sauteur essaye successivement les hauteurs $1, 2, \dots, n, \dots$ jusqu'à ce qu'il échoue. Il a une probabilité $\dfrac{1}{n}$ de réussir son saut à la hauteur n.
On note X la hauteur du dernier saut réussi. On suppose qu'il finit nécessairement par échouer et que les sauts sont indépendants.

1. Déterminer $X(\Omega)$ ainsi que la loi de X.
2. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = 1$.
3. Montrer que X possède une espérance et la calculer.
4. Montrer que X admet une variance et la calculer.

Exercice n°3 Etude d'une VAR et formule des probabilités totales

On joue avec deux dés équilibrés à 6 faces.
On lance un premier dé et on note X la variable aléatoire égale au résultat de ce dé. Ensuite, on lance le second dé jusqu'à ce qu'il indique le même numéro que le premier. On suppose qu'on finit nécessairement par l'obtenir. On note alors Y la variable égale au nombre de fois qu'il faut lancer le second dé pour qu'il indique le même numéro que le premier.

1. Déterminer la loi de X. En déduire son espérance et sa variance.
2. En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à la variable X, déterminer la loi de Y.
3. Justifier que Y possède une espérance et une variance et les calculer.

Exercice n°4 Etude d'une VAR et formule des probabilités composées

Une urne contient 1 boules blanches et $n-1$ boules rouges ($n \geq 2$). On effectue des tirages sans remise dans cette urne.

- On appelle X la variable aléatoire qui donne le rang de sortie de la première boule blanche.
- On appelle Y la variable aléatoire qui donne le nombre de boules rouges restant dans l'urne à ce moment.

1. Déterminer la loi de X. En déduire l'espérance et la variance de X.
2. Exprimer Y en fonction de X. En déduire l'espérance et la variance de Y.
3. Reprendre les questions précédentes dans le cas où l'urne contient au départ 2 boules blanches et $n - 2$ boules rouges ($n \geq 3$).

Exercice n°5 Etude de la VAR discrète : rang du premier Pile-Pile

On joue à Pile ou Face avec une pièce dont la probabilité d'obtenir Pile vaut p et celle d'obtenir Face vaut $q = 1 - p$. On lance indéfiniment la pièce et on note X le rang où apparaît pour la première fois deux résultats Pile consécutifs. Par exemple, si les premiers lancers donnent $F, P, F, F, P, F, P, P, P, F \dots$ alors $X = 8$. On suppose que les lancers sont mutuellement indépendants. On considère les événements :

- P_i : "on obtient pile au i-ème lancer";
- F_i : "on obtient face au i-ème lancer".

1. Calculer en fonction de p et q :
$$P(X = 2), \qquad P(X = 3), \qquad P(X = 4)$$
2. Justifier que $\{F_1,\, P_1 \cap F_2, P_1 \cap P_2\}$ est un système complet d'événements.
3. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$,
$$P(X = k + 2) = qP(X = k + 1) + pqP(X = k).$$
4. On suppose que $p = \dfrac{2}{3}$.
   (a) Etablir que, pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$,
   $$P(X = k + 1) = \frac{4}{9}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^k - \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right].$$
   (b) Montrer que X admet une espérance.
   (c) Montrer que X admet un moment d'ordre 2. Calculer $E(X(X - 1))$, puis en déduire la variance de X.

Lois usuelles

Exercice n°6   Etude de VAR suivant une loi usuelle

1. On lance une pièce de monnaie où la probabilité d'obtenir Pile est $p \in]0,1[$. On note X la variable valant 1 si le résultat est Pile et 0 sinon. Donner la loi de X, son espérance, sa variance.
2. On lance un dé à 6 faces équilibrés. On note Y le résultat du dé. Donner la loi de Y, son espérance, sa variance.
3. On lance 4 fois une pièce de monnaie où la probabilité d'obtenir Pile est $p \in]0,1[$. On note Z la variable donnant le nombre de Pile obtenus. Donner la loi de Z, son espérance, sa variance.
4. On lance une infinité de fois une pièce de monnaie où la probabilité d'obtenir Pile est $p \in]0,1[$. On note W la variable donnant le numéro du premier lancer amenant un Pile. Donner la loi de W, son espérance, sa variance.

Exercice n°7   Reconnaître une loi usuelle

Dans les cas suivants reconnaître la loi de X, donner sa loi, son espérance et sa variance.

1. Alfred achète 20 marrons à un forain. Chaque marron à la probabilité $\dfrac{1}{3}$ d'être véreux. X est la variable aléatoire égale au nombre de marrons véreux achetés.
2. On dispose d'un dé dont 4 côtés sont numérotés 1 et les autres 0. On lance ce dé. X est la variable aléatoire égale au résultat qui apparaît.
3. On dispose de 10 dés dont 4 côtés sont numérotés 1 et les autres 0. On lance ces 10 dés simultanément. X est la variable aléatoire égale à la somme des résultats qui apparaissent.
4. On lance un dé équilibré, jusqu'à obtenir pour la première fois le nombre 6. X est le nombre de tirages nécessaires.
5. Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5. On tire une boule au hasard. X est le numéro de la boule tirée.
6. On sait qu'en France, il y a 10% de gauchers. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de gauchers dans une classe de 40 élèves.

Exercice n°8   Reconnaître et utiliser les lois usuelles

Une piste rectiligne est divisée en cases numérotées 0, 1, 2,..., n,... de gauche à droite. Une puce se déplace vers la droite, de manière indépendante et équiprobable de une ou deux cases à chaque saut.
Au départ, elle est sur la case 0. Soit X_n la variable aléatoire égale au numéro de la case occupée par la puce après n sauts.

1. Reconnaître la loi de X_1 puis donner $E(X_1)$ et $V(X_1)$.
2. On appelle Y_n la variable aléatoire réelle égale au nombre de fois où la puce a sauté d'une case au cours des n premiers sauts. Déterminer la loi de Y_n puis $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.
3. Exprimer X_n en fonction de Y_n. En déduire la loi de X_n, $E(X_n)$ et $V(Y_n)$.