TD n°21 - Equations différentielles linéaires

Exercice n°1 Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle

Dans chaque cas, déterminer si la fonction f proposée est solution de l'équation différentielle :

1. (E_1) : $-2y' + 5y = 6$ sur $\mathbb{R}$ et $f : t \mapsto \frac{6}{5}$;
2. (E_2) : $y' - 2y = e^t$ sur $\mathbb{R}$ et $f : t \mapsto -e^t$;
3. (E_3) : $y'' - y = e^t$ sur $\mathbb{R}$ et $f : t \mapsto te^t$;
4. (E_4) : $y'' + y' + \frac{1}{2}y = t^2 + 4t + \frac{9}{2}$ sur $\mathbb{R}$ et $f : t \mapsto 2t^2 - 1$.

Exercice n°2 Solutions d'une EDL1 homogène à coefficients constants

Soit $a \in \mathbb{R}$, on considère l'équation différentielle (E) : $y' + ay = 0$ d'inconnue y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Justifier que la fonction définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par $f(t) = \lambda e^{-at}$ est une solution de (E).
2. On considère g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ solution de (E).
   (a) Justifier que la fonction $h : t \mapsto g(t)e^{at}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
   (b) En déduire que h est constante.
3. Conclure quant à l'ensemble des solutions de l'équation (E).

Exercice n°3 Savoir résoudre une ED du type $y' + ay = 0$

1. Résoudre $y' - 4y = 0$.
2. Résoudre $y' = -2y$.
3. Résoudre $6y' - 4y = 0$.

Exercice n°4 Déterminer une solution d'une équation différentielle d'un type particulier

Dans chaque cas, déterminer les solutions f de l'équation différentielle du type proposé :

1. (E_1) : $2y' = 9 + 3y$ sur $\mathbb{R}$ et $f : t \mapsto \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$;
2. (E_2) : $y' + 2y = t$ sur $\mathbb{R}$ et $f : t \mapsto at + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$;
3. (E_3) : $y' - y = 5(t+1)e^{2t}$ sur $\mathbb{R}$ et $f : t \mapsto (at+b)e^{2t}$ où $a, b \in \mathbb{R}$;
4. (E_4) : $y'' - 2y' + y = t^2$ sur $\mathbb{R}$ et $f : t \mapsto at^2 + bt + c$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$;
5. (E_5) : $y'' - y = e^{-t}$ sur $\mathbb{R}$ et $f : t \mapsto \lambda e^{-t}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice n°5 Savoir résoudre une ED du type $y' + ay = f(t)$

1. On considère l'équation différentielle (E_1) : $-y' + 2y = 1$ sur $\mathbb{R}$.
   (a) Donner les solutions de l'équation homogène associée.
   (b) Déterminer une solution particulière de (E_1).
   (c) En déduire les solutions de (E_1).
   (d) Justifier qu'il existe une unique solution à (E_1) vérifiant $y(0) = \ln 2$.
2. On considère l'équation différentielle (E_2) : $y' + 2y = t^2$.
   (a) Donner les solutions de l'équation homogène associée.
   (b) Déterminer une solution particulière de (E_2) sous la forme $t \mapsto at^2 + bt + c$.
   (c) En déduire les solutions de (E_2).
   (d) Justifier qu'il existe une unique solution à (E_2) vérifiant $y(0) = 1$.
3. On considère l'équation différentielle (E_3) : $y' - 3y = te^{3t}$.
   (a) Donner les solutions de l'équation homogène associée.
   (b) Déterminer une solution particulière de (E_3) sous la forme $t \mapsto (at+b)e^{3t}$.
   (c) En déduire les solutions de (E_3).
4. On cherche à résoudre l'équation différentielle (E_4) : $y' - y = 5(t+1)e^{2t} + 3$.
   (a) Résoudre l'équation homogène associée à (E_4).
   (b) Chercher une solution particulière de l'équation $y' - y = 3$.
   (c) Chercher une solution particulière de l'équation $y' - y = 5(t+1)e^{2t}$ sous la forme $t \mapsto (at+b)e^{2t}$.
   (d) En déduire une solution particulière de l'équation (E_4).
   (e) En déduire l'ensemble des solutions de (E_4).

Exercice n°6 Savoir résoudre une ED du type $y'' + ay' + by = 0$

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$(E_1) : \ y'' - 4y' + 4y = 0 \quad (E_2) : \ y'' - 3y' - 10y = 0 \quad (E_3) : \ 6y'' - 11y' + 3y = 0.$$

Exercice n°7 Savoir résoudre une ED du type $y'' + ay' + by = f(t)$

On cherche à résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + y = 1 - 2e^{-3t}$.

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E).
2. Déterminer un réel a tel que la fonction $h : t \mapsto ae^{-3t}$ soit une solution particulière de $y'' + 2y' + y = -2e^{-3t}$.
3. (a) Montrer que l'équation (E_1) : $y'' + 2y' + y = 1$ possède une unique trajectoire d'équilibre.
   (b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E_1).
4. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E).