TD n°2 - Sommes et produits

Sommes

Exercice n°1 Justifier la valeur d'une somme grâce à une récurrence

On veut calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, les sommes classiques $S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} k^3$.

1. Prouver par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, l'égalité : $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. Calculer T_1, T_2 et T_3. Conjecturer alors que T_n est carré de $R_n = \sum_{k=0}^{n} k$.
3. Prouver cette conjecture par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
4. A l'aide de ces nouvelles formules, calculer l'expression de $\sum_{k=0}^{n} k(k+1)(k+2)$.

Exercice n°2 Calculer une somme arithmétique ou géométrique

1. Soient $1 \leq p \leq n$ et $a, b \in \mathbb{C}$. Calculer $\sum_{k=p}^{n}(ak+b)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, calculer $A_n = \sum_{k=1}^{n}(0,5)^k$, $B_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{2^k}{3^{k+1}}$ et $C_n = \sum_{k=1}^{n} 3^{2k}$.

Exercice n°3 Connaître et utiliser les propriétés algébriques de $\sum$

Soient $u_1, \ldots, u_n$ et $v_1, \ldots, v_n$ deux suites finies de complexes.

Les expressions suivante sont-elles égales à $\sum_{k=1}^{n}(u_k v_k)$? (*sinon donner un contre-exemple*)

$$A = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right) \ ; \ B = \sum_{k=1}^{n}(u_{n+1-k}v_{n+1-k}) \ ; \ C = \frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n}(u_k+v_k)^2 - \sum_{k=1}^{n}(u_k-v_k)^2\right)$$

Exercice n°4 Calculer une somme par changement d'indice

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n}(k.2^k)$.

1. Par un changement d'indice, montrer que $S_n = 2(S_n - n.2^n - 1 + 2^n)$.
2. En déduire S_n en fonction de n.

Exercice n°5 Calculer une somme par scission

1. Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $u_1, \ldots, u_n$ une suite finie de nombres complexes.

   Compléter : $\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{n} u_k + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{n} u_k = \ldots$
2. Ecrire sous forme développée la somme $\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k$. Conjecturer sa valeur.

   Montrer cette conjecture à l'aide de 1.
3. *Réinvestissement :* Calculer $\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^k k^2$.

Exercice n°6 Calculer une somme par télescopage

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum_{k=1}^{n} k.k!$ en fonction de n (*Indication :* $(k+1)! - k! = \ldots$).
2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.
   (a) Montrer que, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on a $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.
   (b) En déduire la valeur, en fonction de n, de $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{(k+1)!}$ en fonction de n (*Indication :* $k = k+1-1$).
4. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+2)}$.

Exercice n°7 Calculer une somme avec des coefficients binomiaux

Soient $k \leq p \leq n$. Montrer que : $\dbinom{n}{k}\dbinom{n-k}{p-k} = \dbinom{n}{p}\dbinom{p}{k}$.

En déduire l'expression de $\sum_{k=0}^{p} \dbinom{n}{k}\dbinom{n-k}{p-k}$.

Exercice n°8 Connaître et savoir utiliser la formule du binôme

1. Calculer les sommes suivantes pour $n \in \mathbb{N}$:

$$A_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \quad ; \quad B_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k \quad ; \quad C_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$$

2. Soit $f : x \longmapsto (1+x)^n$ où $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$.
   (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
   (b) En déduire la valeur des sommes suivantes :

$$D_n = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} \quad ; \quad E_n = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} \quad ; \quad F_n = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^{\star}$. On pose

$$S_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{k}{n} \qquad \text{et} \qquad T_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{k}{n}$$

   (a) Calculer $S_n + T_n$ et $S_n - T_n$.
   (b) En déduire les valeurs de S_n et T_n.

4. Montrer (sans récurrence) que, pour tout $x \in [0; +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$1 + nx \leq (1+x)^n.$$

Sommes doubles

Exercice n°9 Calculer une somme double
Soit $n \in \mathbb{N}^{\star}$.

1. Calculer $A_n = \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} (i+j)$ et $B_n = \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} 2^{i+j}$.
2. On pose $C_n = \displaystyle\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 2^j$. Montrer que $C_n = 2((n-1)2^n + 1)$.

Produits

Exercice n°10 Manipuler des factorielles
Soit $n \in \mathbb{N}^{\star}$. Exprimer $2 \times 4 \times \ldots \times (2n)$, puis $1 \times 3 \times \ldots \times (2n+1)$ à l'aide de factorielles.

Exercice n°11 Calculer des produits télescopiques, des produits doubles

1. Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$. Calculer $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(\frac{k}{k+1}\right)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^{\star}$. Calculer $\displaystyle\prod_{1 \leq i,j \leq n} ij$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^{\star}$. On pose $P_n = \displaystyle\prod_{1 \leq i < j \leq n} ij$.

   Justifier que : $P_n^2 \times \displaystyle\prod_{1 \leq i \leq n} i^2 = \prod_{1 \leq i,j \leq n} ij$. En déduire une expression de P_n.