TD n°2 - Fonctions polynômes, fonctions rationnelles

Exercice n°1 Connaître et savoir utiliser les propriétés sur les puissances

Soit $n \in \mathbb{N}$. Mettre les expressions ci-dessous, sous la forme $K \times q^n$ le plus simplifiée possible avec K et q réels.

$$A = \frac{3^{n-1}}{4^{n+2}} \quad B = 4(5^{n+2}2^{n-2}) \quad C = 2^{2n} \quad D = 3^{2n-1} \quad E = \left(\frac{2^{3n-1}}{6^{n+1}}\right)^2$$

Fonctions polynômes

Exercice n°2 Utiliser le principe d'identification des polynômes

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère le polynôme f défini par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^4 - 2x^3 - 17x^2 + 4x + 30$.
   (a) Montrer qu'il existe deux réels a et b à déterminer tels que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (x^2 - 2)(x^2 + ax + b).$$
   (b) Déterminer les racines de f.
2. Déterminer tous les polynômes P de degré deux tels que $Q(0) = 0$, $Q(1) = 1$ et $Q(4) = 2$.
3. On considère le polynôme P défini par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 8$.

   Montrer que $P + 1$ est le carré d'un polynôme Q à déterminer.

Exercice n°3 Savoir réaliser une division euclidienne de polynômes

1. Effectuer la division euclidienne de $x^3 + 2x^2 - 7x + 4$ par $x - 1$.
   En déduire l'écrire "en ligne" de cette division euclidienne.
2. Effectuer la division euclidienne de $2x^3 + 2x^2 - x + 6$ par $x + 2$.
   En déduire l'écrire "en ligne" de cette division euclidienne.

Exercice n°4 Savoir résoudre des (in)équations polynomiales

1. On considère le polynôme P défini par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = 9x^3 + 3x^2 - 8x - 4$.
   (a) Déterminer une racine évidente de P, puis le factoriser.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.
   (c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) < 0$.
2. On considère le polynôme Q défini par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = 7x^3 - 24x^2 - 19x + 12$.
   (a) Déterminer une racine évidente de Q, puis le factoriser.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x) = 0$.
   (c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $Q(x) \geq 0$.

Exercice n°5 Savoir factoriser un polynôme dans $\mathbb{R}[x]$

Factoriser "au maximum" les polynôme suivants :

(a) $x^3 - x^2 + x - 6$ (b) $6x^3 + 7x^2 - x - 2$ (c) $x^4 + x^3 - 7x^2 - 13x - 6$ (d) $x^6 - 1$

Exercice n°6 Savoir réaliser une division euclidienne de polynômes

1. Effectuer la division euclidienne de $2x^4 + x^3 - 2x^2 + 5x + 3$ par $2x + 1$.
   En déduire l'écrire "en ligne" de cette division euclidienne.
2. Effectuer la division euclidienne de $2x^3 - x^2 - x + 2$ par $x^2 - 1$.
   En déduire l'écrire "en ligne" de cette division euclidienne.

Exercice n°7 Savoir déterminer le reste d'une division euclidienne de polynômes

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de $x^{61} + 2x + 1$ par $x(x + 1)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de x^n par $x^2 - 5x + 6$.

Exercice n°8 Compléments sur les polynômes du second degré

1. En vous ramenant à une équation du second degré, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes
   $$(E_1) : \ x^4 + 3x^2 - 10 = 0 \qquad (E_2) : \ x = \sqrt{x} + 2$$
2. On admet que les polynômes de degré deux suivants ont un discriminant positif. Déterminer, pour chaque polynôme, le signe de ses racines.
   $$P_1(x) = -x^2 + 12x - 32 \qquad P_2(x) = 7x^2 + 21x - 13 \qquad P_3(x) = 2x^2 + 99x + 29$$

Fonctions rationnelles

Exercice n°9 Utiliser le principe d'identification des polynômes

On considère la fonction rationnelle f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-3, 0, 2\}, \quad f(x) = \frac{2x^2 - 16x - 6}{x^3 + x^2 - 6x}.$$

Déterminer trois réels a, b et c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-3, 0, 2\}, \quad f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x - 2} + \frac{c}{x + 3}.$$

Exercice n°10 Simplifier l'expression d'une fonction rationnelle par DE

On considère la fonction rationnelle f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \quad f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}.$$

Déterminer trois réels a, b et c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \quad f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}.$$