TD n°2 - Suites usuelles

Exercice n°1 Connaître et comprendre les différents modes de définition d'une suite

Pour chacune des suites suivantes calculer les premiers termes jusqu'à pouvoir conjecturer une forme explicite de u_n :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n+1} \end{cases}$.
2. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} v_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\, v_{n+1} = \sqrt{1+v_n^2} \end{cases}$
3. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} x_1 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1},\, x_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}x_n \end{cases}$.
4. $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} y_0 = 1,\, y_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\, y_{n+2} = 2y_{n+1} - y_n \end{cases}$.

Exercice n°2 Savoir étudier le sens de variation d'une suite

Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la suite (u_n) :

1. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n}$.
2. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $u_{n+1} = u_n + e^{-n^3-n^2+1}$
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 10^n - 1$
4. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{n}{n+1}$

Exercice n°3 Exercices de cours sur les suites arith. ou géom.

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Justifier que la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{3^{n+1}}{2^{2n}}$ est géométrique et préciser sa raison.
2. Pour chacune des suites suivantes, donner une expression explicite de u_n :
   (a) $u_0 = 6$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $3u_{n+1} = 8 - 3u_n$
   (b) $u_2 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $5u_n = 7u_{n+1}$
   (c) $u_3 = 6$ et $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 3}$, $\dfrac{5u_n+1}{10} = \dfrac{1}{2}u_{n+1}$
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique telle que $u_{23} = 20$ et $u_{30} = -1$. Déterminer u_0.
4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q > 0$ telle que $u_{10} = 2$ et $u_{12} = 32$. Déterminer u_6.
5. Déterminer les quatre premiers termes u_0, u_1, u_2, u_3 d'une suite arithmétique sachant que :

$$\begin{cases} u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 36 \\ u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 344 \end{cases}$$

Exercice n°4 Savoir étudier des suites se ramenant à des suites arith. ou géom.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 1}{u_n + 4}$.

(On admet le fait que la suite (u_n) de cet exercice est bien définie et que $u_n \neq -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{u_n+1}$.
   Montrer que (v_n) est arithmétique et préciser sa raison.
2. En déduire une expression explicite de u_n.

Exercice n°5 Savoir étudier des suites se ramenant à des suites arith. ou géom.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3+2u_n}{u_n+4}$.

(On admet le fait que la suite (u_n) de cet exercice est bien définie et que $u_n \neq -\dfrac{3}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

1. Soit (v_n) le suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
   (b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 1$.
3. Exprimer u_n en fonction de v_n.
4. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice n°6 Savoir étudier des suites se ramenant à des suites arithmétiques et géométriques

On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n - 3v_n \\ v_{n+1} = -u_n - v_n \end{cases}$$

1. Calculer les premiers termes u_1, u_2, v_1 et v_2.
2. Soient la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $w_n = u_n - v_n$ et la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $z_n = u_n + 3v_n$.
   Montrer que ces deux suites sont géométriques de raisons à déterminer.
3. En déduire une expression explicite de u_n et v_n en fonction de n.

Exercice n°7 Méthode générale déterminer le terme général d'une suite arithmético-géométrique

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$

1. Calculer les trois premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Résoudre l'équation, d'inconnue $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell = 2\ell + 3$.
3. Montrer la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \ell$ est géométrique de raison 2.
4. En déduire l'expression de v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$, puis celle de u_n.
   Vérifier que vous retrouvez bien les termes obtenus à la question 1.

Exercice n°8 Savoir déterminer le terme général d'une suite arithmético-géométrique

Dans chacun des cas, exprimer u_n en fonction de n :

1. $u_0 = -2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -2u_n + 3$.
2. $u_2 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n - 1$.
3. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $2u_{n+1} = 3u_n + 1$.

Exercice n°9 Savoir calculer la somme des termes d'une suite arithmétique ou géométrique

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère (u_n) une suite arithmétique de raison 3 telle que $u_0 = -1$.
   Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 4}$, $u_4 + u_5 + \ldots + u_n$.
2. On considère (u_n) une suite géométrique de raison 1/3 telle que $u_0 = 1$.
   Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, $u_2 + u_3 + \ldots + u_n$.
3. Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \frac{3}{2} - \frac{9}{4} + \frac{27}{8} - \frac{81}{16} + \ldots + \frac{59049}{1024}$$
$$S_2 = -17 - 6 + 5 + 16 + 27 + \ldots + 104$$

Exercice n°10 Calculs de sommes arithmétiques, géométriques

Reconnaître une somme arithmétique ou géométrique et donner sa valeur
On considère $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $q \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\text{(a)} \sum_{k=2}^{n}(3+5k) \qquad \text{(b)} \sum_{k=1}^{n} k \qquad \text{(c)} \sum_{k=0}^{n} 4$$
$$\text{(d)} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{3} \qquad \text{(e)} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3.(-2)^k} \qquad \text{(f)} \sum_{k=0}^{n} q^k \qquad \text{(g)} \sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{2^{2k}}$$

Exercice n°11 Savoir déterminer le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2

Dans chacun des cas, exprimer u_n en fonction de n :

1. $u_0 = 0$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$
2. $u_1 = 1$, $u_2 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^{\star}$, $2u_{n+2} + 3u_{n+1} - 2u_n = 0$
3. $u_0 = -1$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $u_{n+1} - 5u_n = -6u_{n-1}$

Exercice n°12 Savoir étudier des suites se ramenant à des suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définies par les relations de récurrences suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \quad v_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = u_n + 2v_n \end{cases}$$

On cherche à déterminer les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n, puis de v_n en fonction de n.