TD n°3 - Nouvelles fonctions usuelles

Bijectivité et fonction réciproque

Exercice n°1 Etudier la bijectivité d'une fonction et exiber sa réciproque

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x - 1}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Déterminer les ensembles de définition, continuité et dérivabilité de f.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. (a) Sur quels intervalles f réalise-t-elle une bijection continue ? Justifier. En déduire l'ensemble de départ et d'arrivée des fonctions réciproques correspondantes. Sont-elles continues ? Dérivables ?
   (b) La fonction f admet-elle une fonction réciproque f^{-1} sur tout son ensemble de définition ? Si oui, déterminer son ensemble de départ I et son ensemble d'arrivée J.
   (c) En déduire les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ où il faut prendre x et y pour que l'équation $y = f(x)$ admette une unique solution. Déterminer l'expression de la fonction f^{-1}.

Exercice n°2 Etudier une fonction réciproque abstraite

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{2} - 2x + \ln x$.

1. Faire l'étude complète de f.
2. Etudier la bijectivité de f sur son ensemble de définition.
3. Le cas échéant, étudier la continuité, la dérivabilité et les variations de sa fonction réciproque.

Fonctions exponentielle, logarithme, puissances

Exercice n°3 Manipuler des puissances réelles

1. Simplifier (sous réserve d'existence à étudier) :
   a) $e^{\frac{1}{2}\ln(x^2)}$ b) $x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}}$ c) $\left(\exp(x^2)\right)^{\frac{\ln(x^{1/x})}{x}}$.
2. Calculer a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{x^x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+} (x^x)^x$.
3. Résoudre les équations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: a) $5^{x^2} = 7^{x^3}$ b) $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.

Exercice n°4 Etudier une fonction du type $u(x)^{v(x)}$ - Résoudre une équation

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^\star$. Faire l'étude complète de la fonction $x \mapsto a^x$ sur $\mathbb{R}$.
2. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $2^x + 3^x = 5$.

Exercice n°5 Etudier une fonction du type $u(x)^{v(x)}$

On considère la fonction $f : x \mapsto (\sqrt{x})^x$.

1. Faire l'étude complète de f (graphe compris).
2. Déterminer le plus petit réel a tel que : $\forall y \geq a,\ \exists x \in \mathbb{R},\ y = f(x)$.
3. Déterminer le plus petit réel b tel que : $\forall y \geq b,\ \exists! x \in \mathbb{R},\ y = f(x)$.
4. <u>En précisant à chaque fois le théorème utilisé :</u>
   <u>Donner un intervalle I tel que la restriction de f sur I admette une fonction réciproque définie</u> sur $[a; +\infty[$. Sur quel intervalle cette fonction réciproque est-elle continue ? dérivable ?

Fonctions hyperboliques

Exercice n°6 Etudier les propriétés des fonctions hyperboliques

On considère les fonctions : cosinus hyperbolique, noté ch, et sinus hyperbolique, noté sh, suivantes:

$$\text{ch} : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{sh} : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1. Faire l'étude complète (parité et graphe compris) de ch et sh.
2. Montrer les propriétés suivantes :
   (a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \text{ch}x + \text{sh}x = e^x$.
   (b) $\forall x \in \mathbb{R},\ \text{ch}x - \text{sh}x = e^{-x}$.
   (c) $\forall x \in \mathbb{R},\ \text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$.
3. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $\text{ch}x = 3$.

Exercice n°7 Utiliser les fonctions hyperboliques pour exprimer une somme géométrique

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^\star$.

1. Ecrire avec le symbole $\sum$ la somme suivante : $S_n = 1 + e^x + e^{2x} + \ldots + e^{nx}$.
2. Montrer que $S_n = \dfrac{\text{sh}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\text{sh}\left(\frac{x}{2}\right)} e^{\frac{n}{2}x}$.
3. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \text{ch}(kx)$.

Fonctions circulaires réciproques

Exercice n°8 Manipuler les fonctions trigonométriques réciproques

1. Calculer : a) $\arccos\left(\cos\dfrac{8\pi}{3}\right)$ b) $\arcsin\left(\sin\dfrac{17\pi}{3}\right)$ c) $\arctan\left(\tan\dfrac{-11\pi}{4}\right)$.
2. Faire l'étude complète (graphe compris) de la fonction $f : x \mapsto \arcsin(\sin x)$.

3. Après avoir précisé leur domaine de validité, simplifier les expressions suivantes :

   a) $\sin(\arcsin(2x))$ b) $\tan(2\arctan x)$ c) $\sin(2\arccos x)$ d) $\tan\left(\arcsin(x) - \frac{\pi}{2}\right)$

4. Montrer que : $2\arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Exercice n°9 Montrer une formule trigonométrique avec une étude de fonction

1. On considère la fonction $f : x \mapsto \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^\star$.
   (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et calculer sa dérivée.
   (b) En déduire une autre écriture de $f(x)$ en fonction de $x \in \mathbb{R}^\star$.
2. Sur un modèle similaire à la question 1. montrer les formules (après avoir précisé le domaine de validité) :
   (a) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.
   (b) $\arcsin x = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

Exercice n°10 Une nouvelle relation du formulaire trigonométrique

On considère la fonction $f : x \mapsto \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f, son ensemble de dérivabilité, puis calculer sa dérivée.
2. Trouver une expression simplifiée de $f(x)$ sur $]-1;1[$. Est-elle vraie sur $[-1;1]$?
3. Autre méthode : identifier une formule sur votre formulaire de trigonométrie qui vous permettra de répondre à la question précédente. Grâce à cette formule, introduire une nouvelle variable θ et simplifier f dans le cas où θ est dans un intervalle ad hoc.
   Retrouve-t-on le résultat de la question précédente ?

Exercice n°11 Un problème

On considère une statue de hauteur h placée sur un pied de hauteur p.
A quelle distance d une personne de taille $t \leq p$ doit-elle se situer pour voir la statue sous un angle maximal ?
Indication : Faire un schéma !