TD n°3 - Dernières fonctions usuelles

Exercice n°1 Déterminer les variations d'une fonction pour établir une inégalité

1. Montrer que : $\forall x \in [1;+\infty[, \quad x^3 \geq x^2 - x + 1$
2. Montrer que : $\forall x \in [0;1], \quad 0 \leq x(1-x) \leq \dfrac{1}{4}$
3. Soient a et b deux réels strictement positifs. Montrer que : $\forall x > 0, \quad \dfrac{a}{x} + \dfrac{x}{b} \geq 2\sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

Fonctions exp et ln

Exercice n°2 Connaître et utiliser les propriétés algébriques de exp et ln

1. Déterminer le réel $x > 0$ tel que $2\ln 3 - 2\ln 2 + \ln\left(\dfrac{3}{4}\right) = \ln x$
2. Soient x, y tels que les expressions suivantes soient bien définies.
Simplifier "le plus possible" ces expressions :

(a) $\ln(2x) - \ln(x)$

(b) $\dfrac{\ln(2x)}{\ln(x)}$

(c) $\ln\left(x^2\right) - \ln(x)$

(d) $\ln(x) - \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(e) $\dfrac{\exp(x^2)}{\exp(2x)}$

(f) $\exp(x^2+1) - (\exp(x))^2$

(g) $2\ln\left(x^3\right) - \ln\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$

(h) $\ln(1) + \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) + \ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

(i) $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) + \ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$

(j) $\exp(-\ln 5)$

Exercice n°3 Résoudre des (in)équations avec des exp et ln

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes :

1. $(\ln x)^2 + 3\ln x + 2 = 0$
2. $e^x + e^{-x} = 2$
3. $x\ln x = 0$
4. $e^x e^{x^2} = 1$

(e) $2\ln(3x) \leq \ln(2x)$

(f) $xe^x > x$

(g) $\ln\left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right) \leq 0$

Exercice n°4 Calculer la dérivée d'une fonction du type exp(u) ou ln(u)

Dans cet exercice, on ne se souciera pas des ensembles de définition et de dérivabilité.

Déterminer l'expression de la dérivée des fonctions suivantes :

$$f(x) = e^{3x} \qquad g(x) = e^{x^3-x} \qquad h(x) = \ln(2x^2-9) \qquad i(x) = \ln(1+2e^{-x})$$

Exercice n°5 Déterminer les variations d'une fonction pour établir une inégalité

1. Montrer les propriétés suivantes :
   (a) $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad \ln(x) \leq x$
   (b) Déduire de l'inégalité précédente que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad \ln(x) \leq 2\sqrt{x}$
2. Montrer les propriétés suivantes :
   (a) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + 1 \leq e^x$
   (b) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 + x + \dfrac{x^2}{2} \leq e^x$
   (c) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} \leq e^x$
   (d) Généraliser.
3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(x+1)$

Fonctions puissances réelles

Exercice n°6 Savoir réécrire l'expression d'une fonction puissance

Réécrire et, éventuellement, simplifier les expressions suivantes à l'aide des fonctions exp et ln. On ne se souciera pas de l'existence de ces expressions.

$$x^{\frac{1}{x}} \qquad \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \qquad x^{\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}} \qquad \left(\exp(x^2)\right)^{\frac{\ln\left(x^{1/x}\right)}{x}}$$

Exercice n°7 Résoudre une (in)équation faisant intervenir une fonction puissance

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes :

$$(E_1):\ x^{5/3} = 3 \qquad (E_2):\ 10^{x-1} = 2^{x+1} \qquad (E_3):\ 0,8^x \leq 0,1 \qquad (E_4):\ x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x$$

Exercice n°8 Dérivée une fonction du type $x \mapsto f(x)^{g(x)}$

Déterminer le domaine de définition et la dérivée des fonctions définies par les expressions suivantes. On ne se souciera pas de l'ensemble de dérivabilité de ces fonctions.

$$a : x \mapsto x^{2/3} \qquad b : x \mapsto 4^{x+1} \qquad c : x \mapsto (\ln x)^{\ln x} \qquad d : x \mapsto (2x-1)^{\sqrt{x}}$$

Exercice n°9 Etudier les variations d'une fonction du type $x \mapsto f(x)^{g(x)}$

Etudier, sur leur ensemble de définition, les variations des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto x^{\ln x} \qquad g : x \mapsto x^{1+\frac{1}{x}}$$

Fonction partie entière

Exercice n°10 Résoudre des équations avec une partie entière

1. Résoudre l'équation $\lfloor 3x - 1 \rfloor = 5$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. Résoudre l'équation $\lfloor x^2 - 5x + 6 \rfloor = 2$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. Résoudre l'équation $\lfloor |2x-1| \rfloor = 3$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.