# TD n°3 - Suites usuelles

## Généralités sur les suites

**Exercice n°1 Connaître et comprendre les différents modes de définition d'une suite**

Pour chacune des suites suivantes, préciser son mode de définition (explicite ou par récurrence) puis calculer ses 4 premiers termes :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n-5}{n+1}$.
2. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} v_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = -v_n^2 + v_n - 1 \end{cases}$.
3. $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} w_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = f(w_n) \end{cases}$

   où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{x-2}{x^2+1}$.
4. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} x_0 = 1,\ x_1 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+2} = -x_{n+1} + x_n \end{cases}$.
5. $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} y_1 = 5, \\ \forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1},\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{2}{n} \end{cases}$.

**Exercice n°2 Sens de variation d'une suite et variation de la fonction associée**

1. Etablir le tableau de variation de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}x + 2$.
2. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies respectivement par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{2}n + 2 \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} v_0 = 8 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + 2 \end{cases}$$

   (a) Que peut-on déduire de la question 1. concernant le sens de variation des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ?

   (b) Calculer les 4 premiers termes des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Que peut-on en conclure ?

**Exercice n°3 Savoir étudier le sens de variation d'une suite définie explicitement**

Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la suite $(u_n)$ :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = \dfrac{1}{n}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = \dfrac{n^2+1}{n}$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = e^n$
4. $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = -\ln(n)$
5. $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = \sqrt{n+3}$
6. $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = \dfrac{3^n}{n}$

**Exercice n°4 Savoir étudier le sens de variation d'une suite définie par récurrence**

Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la suite $(u_n)$ :

1. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + u_n^2$
2. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + e^{u_n}$
3. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \ln(1 + |u_n|)$

## Suites usuelles

**Exercice n°5 Savoir calculer une somme de termes d'une suite arithmétique**

1. Pour chacune des suites suivantes, donner une expression explicite de $u_n$ puis calculer la somme des dix premiers termes :

   (a) $u_0 = 6$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 3$

   (b) $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -1 + u_n$

   (c) $u_3 = 6$ et $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 3},\ u_{n+1} = u_n + 5$
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison inconnue $r \in \mathbb{R}$ telle que $u_0 = 20$ et $u_4 = 5$.

   (a) Déterminer l'expression explicite de $u_n$ en fonction de $n$.

   (b) Calculer la somme des $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ premiers termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Exercice n°6 Savoir calculer une somme de termes d'une suite géométrique**

Pour chacune des suites suivantes, donner le terme général puis calculer la somme des dix premiers termes consécutifs, puis celle des $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ premiers termes consécutifs :

1. $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n$
2. $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ 3u_{n+1} = u_n$
3. $u_3 = 6$ et $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 3},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n$

**Exercice n°7 Savoir déterminer le terme général d'une suite arithmético-géométrique**

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$

1. Calculer les trois premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Résoudre l'équation, d'inconnue $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell = 2\ell + 3$.
3. Montrer la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - \ell$ est géométrique de raison 2.
4. En déduire l'expression de $v_n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$, puis celle de $u_n$.
   Vérifier que vous retrouvez bien les termes obtenus à la question 1.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme $v_0 + v_1 + \ldots + v_n$. En déduire la somme $u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

**Exercice n°8 Savoir déterminer le terme général d'une suite arithmético-géométrique**

Dans chacun des cas, exprimer $u_n$ en fonction de $n$ :

1. $u_0 = -2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -2u_n + 3$.
2. $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n - 1$.
3. $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $2u_{n+1} = 3u_n + 1$.

**Exercice n°9 Savoir déterminer le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2**

Dans chacun des cas, exprimer $u_n$ en fonction de $n$ :

1. $u_0 = 0$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$
2. $u_1 = 1$, $u_2 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $2u_{n+2} + 3u_{n+1} - 2u_n = 0$
3. $u_0 = -1$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $u_{n+1} - 5u_n = -6u_{n-1}$

## Autres types de suites

**Exercice n°10 Savoir étudier des suites se ramenant à des suites arithmétiques et géométriques**

On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n - 3v_n \\ v_{n+1} = -u_n - v_n \end{cases}$$

1. Calculer les premiers termes $u_1$, $u_2$, $v_1$ et $v_2$.
2. Soient la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $w_n = u_n - v_n$ et la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $z_n = u_n + 3v_n$.

   Montrer que ces deux suites sont géométriques ou arithmétiques de raisons à déterminer.
3. Exprimer $u_n$ et $v_n$ en fonction de $n$.

**Exercice n°11 Savoir étudier des suites se ramenant à des suites arithmético-géométriques**

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 3^n$.

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \dfrac{u_n}{3^n}$ est arithmético-géométrique.
2. En déduire une expression de $v_n$ puis de $u_n$ en fonction de $n$.

**Exercice n°12 Savoir étudier des suites se ramenant à des suites récurrentes linéaires d'ordre 2**

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définies par les relations de récurrences suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \quad v_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = u_n + 2v_n \end{cases}$$

On cherche à déterminer les expressions de $u_n$ et $v_n$ en fonction de $n$.

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.
2. En déduire l'expression de $u_n$ en fonction de $n$, puis de $v_n$ en fonction de $n$.

**Exercice n°13 Etude d'une première suite récurrente homographique**

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}$.

(On admet le fait que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ de cet exercice sont bien définies)

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni arithmétique, ni géométrique.
2. Soit $(v_n)$ le suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \dfrac{1 + u_n}{2 - 2u_n}$.
   (a) Montrer que la suite $(v_n)$ est géométrique.
   (b) En déduire l'expression de $v_n$ en fonction de $n$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \neq -\dfrac{1}{2}$. Exprimer $u_n$ en fonction de $v_n$.
4. En déduire l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.

**Exercice n°14 Etude d'une seconde suite récurrente homographique**

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3 + 2u_n}{u_n + 4}$.

(On admet le fait que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ de cet exercice sont bien définies)

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni arithmétique, ni géométrique.
2. Soit $(v_n)$ le suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$.
   (a) Montrer que la suite $(v_n)$ est géométrique.
   (b) En déduire l'expression de $v_n$ en fonction de $n$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \neq 1$. Exprimer $u_n$ en fonction de $v_n$.
4. En déduire l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.