TD n°4 - Nombres complexes

Manipulation des complexes - Conjugué - Module

Exercice n°1 Mettre sous forme algébrique un nombre complexe

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

a) $\dfrac{1+i}{i}$ b) $\dfrac{1}{2-4i}$ c) $\dfrac{3+6i}{3-4i}$ d) $(1+i)^2+\overline{\left(\dfrac{2+6i}{2-3i}\right)}$

Exercice n°2 Utiliser la propriété du module $|z|^2 = z\bar{z}$

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Montrer que : $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$.
Traduire géométriquement cette égalité.

Exercice n°3 Utiliser les propriétés algébriques du conjugué et du module

1. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \in i\mathbb{R} \iff \bar{z} = -z$.
2. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z$.
3. Soient $a, b \in \mathbb{U}$.
   (a) Traduire le fait que $a, b \in \mathbb{U}$ à l'aide du module.
   (b) En déduire $\dfrac{1}{a}$ et $\dfrac{1}{b}$ en fonction de a et b.
   (c) On suppose que $ab \neq -1$. Montrer que :
$$\frac{a+b}{1+ab} \in \mathbb{R}.$$
4. On suppose que $a \neq b$. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$\frac{z+ab\bar{z}-(a+b)}{a-b} \in i\mathbb{R}.$$

Exercice n°4 Inégalité triangulaire généralisée

1. Soient $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\left|\sum_{k=0}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |z_k|$$
2. En déduire que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \neq 1$, et tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| \leq \frac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|}.$$

Interprétation géométrique

On munit le plan $\mathscr{P}$ d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Exercice n°5 Interpréter graphiquement des relations complexes

Sans (quasiment) aucun calcul, déterminer les sous-ensembles du plan suivants :

1. $\mathscr{E} = \{M(z) \in \mathscr{P} \mid |z-2i| = 2\}$ puis $\mathscr{F} = \{M(z) \in \mathscr{P} \mid |-2iz+1-4i| = 4\}$.
2. $\mathscr{G} = \{M(z) \in \mathscr{P} \mid |z+5| = |z-i|\}$ puis $\mathscr{H} = \{M(z) \in \mathscr{P} \mid |2+i-z| = |\bar{z}+3i|\}$.

Exercice n°6 Fonction de la variable complexe et interprétation géométrique

On considère la fonction $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C}\backslash\{2\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \dfrac{z+1}{z-2} \end{array}$

1. La fonction f est-elle bijective ? Si f n'est pas bijective, déterminer les plus grandes parties I et J de $\mathbb{C}$ tels que f réalise une bijection de I sur J.
2. Déterminer les sous-ensembles du plan suivants :
$$\mathscr{E} = \{M(z) \in \mathscr{P} \mid |f(z)| = 1\} \qquad \mathscr{F} = \{M(z) \in \mathscr{P} \mid |f(z)| \leq 1\}$$
$$\mathscr{G} = \{M(z) \in \mathscr{P} \mid f(z) \in \mathbb{R}\} \qquad \mathscr{H} = \{M(z) \in \mathscr{P} \mid f(z) \in i\mathbb{R}\}$$

Applications des complexes à la trigonométrie

Exercice n°7 Savoir linéariser

Linéariser $\cos^2(x)$, $\sin^4(x)$ et $\cos^2(x)\sin^3(x)$.

Exercice n°8 Savoir "dé"linéariser

1. Exprimer $\sin(5x)$ en fonction de $\sin(x)$.
   On écrira le résultat sous la forme $\sin(5x) = P(\sin(x))$ où P est un polynôme de degré 5.
2. Déterminer les racines de P.
3. Montrer que $\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ est une racine de P, et en déduire sa valeur.

Exercice n°9 Savoir calculer des sommes trigonométriques

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. L'objectif de cet exercice est de calculer les sommes
$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$$

1. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$ (**<u>attention</u>**, il y a $\boxed{\textbf{deux}}$ cas à distinguer, lesquels ?)
2. Calculer $A_n + iB_n$. En déduire une expression de A_n et de B_n sans le symbole $\sum$.
3. Rappeler la factorisation de $1 - e^{i\theta}$, pour $\theta \in \mathbb{R}$, par la technique de l'arc moitié.
   En déduire une nouvelle expression de A_n et B_n faisant intervenir les fonctions cos et sin.

Exercice n°10 Retour sur les équations trigonométriques

1. Transformer les expressions suivantes en expression de la forme $A\cos(x-\varphi)$ où $A>0$ et $\varphi\in\mathbb{R}$ à déterminer.

$$\text{(a)}\quad \cos(x)-\sqrt{3}\sin(x) \qquad \text{et} \qquad \text{(b)}\quad -\cos(3x)+\sin(3x).$$

2. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ des équations :

$$(E_1):\quad \cos(x)-\sqrt{3}\sin(x)=1 \qquad \text{et} \qquad (E_2):\quad -\cos(3x)+\sin(3x)=\sqrt{2}.$$

3. Soit $x\in\mathbb{R}$. Factoriser l'expression suivante : $\cos(x)+\cos(3x)$ à l'aide des nouvelles formules vues en cours.
4. En déduire les solutions de l'équation

$$(E_3):\quad \cos(x)+\cos(2x)+\cos(3x)=0.$$

Exercice n°11 Résolution d'une équation à l'aide des complexes

On considère le polynôme $P(x)=x^3-3x+1$.

1. Prouver que l'équation $P(x)=0$ admet exactement trois solutions réelles.
2. Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Simplifier $P(e^{i\theta}+e^{-i\theta})$.
En déduire les valeurs de θ pour lesquelles $P(e^{i\theta}+e^{-i\theta})=0$.
3. Conclure sur les 3 racines de P.

Exercice n°12 Utiliser les racines n-ième de l'unité

Soit $\omega=e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{4}\omega^k=0$, puis que $1+2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=0$.
2. En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de $4x^2+2x-1=0$.
3. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Formes trigonométriques d'un nombre complexe

Exercice n°13 Déterminer et utiliser les formes trigonométriques d'un complexe

1. Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$z_1=-5 \qquad z_2=-2i \qquad z_3=-2i-2 \qquad z_4=-3+i\sqrt{3} \qquad z_5=1+e^{i\theta}\ (\text{où } \theta\in[0;2\pi]).$$

2. Déterminer la forme algébrique du nombre complexe : $(1+i)^{2020}$.

Résoudre des équations dans $\mathbb{C}$

Exercice n°14 Déterminer les racines carrées d'un complexe

1. (a) Rappeler la forme trigonométrique de $1+i$.
   (b) En déduire les racines carrées de $1+i$ sous forme trigonométrique.
   (c) En utilisant la méthode vue en cours, déterminer les racines carrées de $1+i$ sous forme algébrique.
   (d) En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
2. (a) Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe suivant : $-15+8i$.
   (b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) : $z^2=-15+8i$ sous forme trigonométrique.
   (c) En utilisant la méthode vue en cours, déterminer les solutions de (E) sous forme algébrique.

Exercice n°15 Résoudre une équation du second degré

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$(E_1):\quad 2z^2-(1+5i)z-2(1-i)=0 \qquad (E_2):\quad z^2+(1-i)z-i=0$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système suivant : $\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=1 \end{cases}$

Exercice n°16 Déterminer les racines n-ième d'un complexe

1. Déterminer les racines cubiques de :

$$z_1=-2i \qquad z_2=4\sqrt{2}(1+i) \qquad z_3=4\frac{-1-i}{-1+i\sqrt{3}}.$$

2. Soit $n\in\mathbb{N}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^{2n}+iz^n+2=0$.

Exercice n°17 Résoudre des équations avec l'exponentielle complexe

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

$$(E_1):\quad e^z=-2 \qquad (E_2):\quad e^z=5i \qquad (E_3):\quad e^z=1+i.$$

Complexes et géométrie plane

Exercice n°18 Etudier des situations d'alignements, d'orthogonalité

Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z dans les cas suivants :

1. $\dfrac{z-1-i}{z+1} \in \mathbb{R}$.
2. $|z| = |z-1| = \left|\dfrac{1}{z}\right|$.
3. 1, z et z^2 sont alignés.
4. i, z et iz forment un triangle équilatéral.
5. z, z^2, z^3 forment un triangle rectangle en z.

Fonctions à valeurs complexes

Exercice n°19 Etudier une fonction à valeurs complexes

Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $\boxed{f : x \mapsto \dfrac{1+ix}{1-ix}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $I \subset \mathbb{R}$ et l'ensemble K de dérivabilité de f.
2. Vérifier que l'ensemble image de f est inclus dans $\mathbb{U}$, l'ensemble des nombres complexes de module 1.
3. Prouver que f réalise une bijection de I sur $\mathbb{U}\backslash\{-1\}$ et déterminer la bijection réciproque associée.
4. Déterminer l'argument de $1-ix$ et de $1+ix$. En déduire que $f : x \mapsto e^{2i\arctan x}$.
5. A l'aide de la forme algébrique de f, donner une forme simplifiée de $\cos(2\arctan x)$ et $\sin(2\arctan x)$.
6. Grâce à f, justifier que, pour tout $x \in]-1;1[$, $\arctan\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right) = 2\arctan x$.