TD n°4 - Récurrences - Sommes et produits

Raisonnement par récurrence

Exercice n°1 Démontrer une majoration/minoration des termes d'une suite

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 1$.

   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}}$.

   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

Exercice n°2 Justifier l'expression explicite d'une suite si elle est donnée

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = -3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5 - 4u_n$.

   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-4)^{n+1} + 1$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 6$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n - 3$.

   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 12\left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 6$.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 - 2$.

   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(2-\sqrt{3}\right)^{2^n} + \left(2+\sqrt{3}\right)^{2^n}$.

Exercice n°3 Savoir démontrer un résultat par récurrence double

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^{\geq 1}}$ la suite définie par $u_1 = 0$, $u_2 = -9$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$.

   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (1-n)3^n$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = -1$, $u_1 = -1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n - 2^{n+1}$.

Exercice n°4 Démontrer une inégalité par récurrence

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1}, \quad n+1 \leq 2^n$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (1+a)^n \geq 1 + na$.

Exercice n°5 Justifier qu'une suite récurrente d'ordre 1 est bien définie

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} - 1$.

   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n$ est bien défini et $u_n \geq 1$.

   Ici la propriété $\mathscr{P}(n)$ est "u_n est bien défini et $u_n \geq 1$"
   (deux propriétés à démontrer simultanément)

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 4}{u_n + 1}$.

   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n$ est bien défini et $u_n \geq 2$.

   Ici la propriété $\mathscr{P}(n)$ est "u_n est bien défini et $u_n > 2$"
   (deux propriétés à démontrer simultanément)

Sommes

Exercice n°6 Comprendre et utiliser le symbole $\sum$

Ecrire sans le symbole $\sum$ les expressions suivantes :

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 \qquad \sum_{j=3}^{5} \frac{j^2}{3^j} \qquad \sum_{n=0}^{2} (-1)^{n^2} \frac{x^{2n+4}}{n+1} \qquad \sum_{p=3}^{5} x(1-x^2)^p \text{ où } x \in \mathbb{R}$$

Exercice n°7 Comprendre et utiliser le symbole $\sum$

Ecrire à l'aide du symbole $\sum$ les expressions suivantes :

1. $3^4 + 3^5 + 3^6 + \ldots + 3^{15}$
2. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{4} + \dfrac{3}{8} + \dfrac{4}{16} + \ldots + \dfrac{10}{1024}$
3. $2 - 4 + 6 - 8 + \ldots + 50$
4. $x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots + \dfrac{x^n}{n}$ où $x \in \mathbb{R}$

Exercice n°8 Calculs de sommes arithmétiques, géométriques

Reconnaître une somme arithmétique ou géométrique et donner sa valeur
On considère $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $q \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) $\displaystyle\sum_{k=5}^{11} k$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ (c) $\displaystyle\sum_{k=3}^{23} 4$ (d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda$ (e) $\displaystyle\sum_{i=5}^{11} (3+5i)$ (f) $\displaystyle\sum_{k=5}^{11} \frac{2^k}{3}$

(g) $\displaystyle\sum_{k=3}^{125} \frac{48}{2^k}$ (h) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$ (i) $\displaystyle\sum_{k=5}^{11} \frac{3^k}{2^{2k}}$

Exercice n°9 Justifier l'expression explicite d'une somme si elle est donnée

1. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^2$.
3. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, on pose :
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)$$
   (a) Calculer les quatre premiers termes de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$.
   (b) Conjecturer une formule simple pour S_n et la démontrer par récurrence sur $\mathbb{N}^{\geq 1}$.

Exercice n°10 Utiliser les propriétés de $\sum$ pour réaliser des calculs

Calculer les sommes suivantes :

1. **Utiliser la linéarité :**
$$A_n = \sum_{n=1}^{N} (5.2^n + 2.3^{2n}), \quad B_n = \sum_{j=1}^{n} (2j-1), \quad C_n = \sum_{k=1}^{2n} k(2k-1)(k+1)$$
2. **Utiliser la relation de Chasles :**
$$D_n = \sum_{k=n}^{2n} k^2$$
3. **Utiliser un changement d'indice :**
$$E_n = \sum_{k=3}^{n} (k-2)^2, \quad F_n = \sum_{k=1}^{n} (n-k)^2, \quad G_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$$

Exercice n°11 Repérer puis calculer une somme télescopique

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.
   (a) Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on a $\displaystyle\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$.
   (b) En déduire la valeur, en fonction de n, de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.
2. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $2k+1 = (k+1)^2 - k^2$.
   (b) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k+1)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k.k!$ en fonction de n (*Indication :* $(k+1)! - k! = \ldots$).

Exercice n°12 Savoir calculer une somme double

Calculer les sommes suivantes :
$$A = \sum_{1\leq i,j\leq n} (i+j) \qquad B = \sum_{1\leq i,j\leq n} 2^{i+j} \qquad C = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} 2^j$$

Produits

Exercice n°13 Manipuler des factoriels

1. Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Les égalités suivantes sont-elles vraies ? Justifier.
$$(n+1)! = (n+1)n! \qquad n! = n(n-1)! \qquad (n+2)! = (n+2)(n+1)! = (n+2)(n+1)n!$$
2. Simplifier les expressions suivantes :
$$A_n = n\frac{1}{n!},\ n \in \mathbb{N}^{\geq 1} \qquad B = n(n-1)\frac{1}{n!},\ n \in \mathbb{N}^{\geq 2} \qquad C = \frac{(2n)!}{n!},\ n \in \mathbb{N}$$

Exercice n°14 Savoir calculer des produits simples

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les produits suivants :
$$A_n = \prod_{k=0}^{n} 3, \quad B_n = \prod_{k=0}^{n} (3k), \quad C_n = \prod_{k=0}^{n} 5^k, \quad D_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}.$$

Exercice n°15 Savoir calculer des produits classiques

Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

1. Ecrire à l'aide du symbole $\prod$ le produit P_n des n premiers entiers pairs, puis I_n des n premiers entiers impairs.
2. Ecrire P_n et I_n en fonction de n uniquement à l'aide de la notation factorielle.

Exercice n°16 Produits intervenant dans des formules classiques

1. Soient $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^\star$.
   Montrer par récurrence sur $\mathbb{N}$ la propriété :
$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(a_k).$$
2. Soient $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.
   Montrer par récurrence sur $\mathbb{N}$ la propriété :
$$\exp\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \exp(a_k).$$
3. *Application :* Donner une expression (sans les symboles $\sum$ et $\prod$) en fonction de $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ des expressions suivantes :
$$R_n = \prod_{k=1}^{n} e^k \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$$