TD n°4 - Suites usuelles

Généralités sur les suites

Exercice n°1 Connaître et comprendre les différents modes de définition d'une suite

Donner les 4 premiers termes des suites suivantes :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n-5}{n+1}$.
2. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} v_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = -v_n^2 + v_n - 1 \end{cases}$.
3. $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} w_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = f(w_n) \end{cases}$

   où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{x-2}{x^2+1}$.
4. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} x_0 = 1,\ x_1 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+2} = -x_{n+1} + x_n \end{cases}$.
5. $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} y_1 = 5, \\ \forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1},\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{2}{n} \end{cases}$.

Exercice n°2 Savoir étudier le sens de variation d'une suite

1. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -n + 4.$$
   (a) Etablir le tableau de variation de la fonction $f : x \mapsto -x + 4$.
   (b) En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = -v_n + 4 = f(v_n) \end{cases}$$
   (a) Calculer les six premiers termes de la suite.
   (b) Que peut-on conjecturer quant au sens de variation de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice n°3 Savoir étudier le sens de variation d'une suite définie explicitement

Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la suite (u_n) :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = \dfrac{1}{n}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = \dfrac{n^2+1}{n}$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = e^n$
4. $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = -\ln(n)$
5. $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = \sqrt{n+3}$
6. $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = \dfrac{3^n}{n}$

Exercice n°4 Savoir étudier le sens de variation d'une suite définie par récurrence

Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la suite (u_n) :

1. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_{n+1} = u_n + u_n^2$
2. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_{n+1} = u_n + e^{u_n}$
3. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_{n+1} = u_n + \ln(1 + |u_n|)$

Exercice n°5 Savoir montrer qu'une suite est majorée, minorée, bornée

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes :

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \dfrac{3n+1}{n+1}$.
   (a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 3.
   (b) En déduire qu'elle est bornée.
2. Les suites suivantes sont-elles minorées ? majorées ? bornées ? monotones ?
$$u_n = e^n, \quad v_n = \frac{(-1)^n}{n+1}, \quad w_n = (-2)^n, \quad x_n = 2 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Suites usuelles

Exercice n°6 Savoir calculer une somme de termes d'une suite arithmétique

Pour chacune des suites suivantes, donner le terme général puis calculer la somme des dix premiers termes consécutifs :

1. $u_0 = 6$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 3$
2. $v_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = -1 + v_n$
3. $w_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n - w_{n+1} = -2$
4. $x_3 = 6$ et $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 3},\ x_{n+1} = x_n + 5$

Exercice n°7 Savoir calculer une somme de termes d'une suite géométrique

Pour chacune des suites suivantes, donner le terme général puis calculer la somme des dix premiers termes consécutifs :

1. $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n$
2. $v_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ 3v_{n+1} = v_n$
3. $w_0 = 6$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ w_n = \dfrac{w_{n-1}}{2}$
4. $x_3 = 6$ et $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 3},\ x_{n+1} = \dfrac{1}{3}x_n$

Exercice n°8 Savoir déterminer le terme général d'une suite arithmético-géométrique

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$

1. Calculer les trois premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer un réel ℓ tel que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - \ell$, soit géométrique de raison 2.
3. En déduire l'expression de v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$, puis celle de u_n.
   Vérifier que vous retrouvez bien les termes obtenus à la question 1.
4. Répondre aux mêmes questions pour la suite suivante : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b \end{cases}$
   où $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$.

Exercice n°9 Savoir déterminer le terme général d'une suite arithmético-géométrique

Dans chacun des cas, exprimer u_n en fonction de n :

1. $u_0 = -2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -2u_n + 3$.
2. $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n - 1$.
3. $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $2u_{n+1} = 3u_n + 1$.

Exercice n°10 Savoir déterminer le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2

Dans chacun des cas, exprimer u_n en fonction de n :

1. $u_0 = 0$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$
2. $u_1 = 1$, $u_2 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $2u_{n+2} + 3u_{n+1} - 2u_n = 0$
3. $u_0 = -1$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $u_{n+1} - 5u_n = -6u_{n-1}$

Autres types de suites

Exercice n°11 Savoir étudier des suites se ramenant à des suites arithmétiques et géométriques

On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n - 3v_n \\ v_{n+1} = -u_n - v_n \end{cases}$$

1. Calculer les premiers termes u_1, u_2, v_1 et v_2.
2. Soient la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $w_n = u_n - v_n$ et la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $z_n = u_n + 3v_n$.

   Montrer que ces deux suites sont géométriques ou arithmétiques de raisons à déterminer.
3. Exprimer u_n et v_n en fonction de n.

Exercice n°12 Savoir étudier des suites se ramenant à des suites arithmético-géométriques

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 3^n$.

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \dfrac{u_n}{3^n}$ est arithmético-géométrique.
2. En déduire une expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

Exercice n°13 Savoir étudier des suites se ramenant à des suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définies par les relations de récurrences suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \quad v_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = u_n + 2v_n \end{cases}$$

On cherche à déterminer les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n, puis de v_n en fonction de n.

Exercice n°14 Etude d'une première suite récurrente homographique

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}$.

(On admet le fait que les suites (u_n) et (v_n) de cet exercice sont bien définies)

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni arithmétique, ni géométrique.
2. Soit (v_n) le suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \dfrac{1 + u_n}{2 - 2u_n}$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
   (b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \neq -\dfrac{1}{2}$. Exprimer u_n en fonction de v_n.
4. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice n°15 Etude d'une seconde suite récurrente homographique

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3 + 2u_n}{u_n + 4}$.

(On admet le fait que les suites (u_n) et (v_n) de cet exercice sont bien définies)

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni arithmétique, ni géométrique.
2. Soit (v_n) le suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
   (b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \neq 1$. Exprimer u_n en fonction de v_n.
4. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.