

TD n°4 - Systèmes linéaires

Exercice n°1 Premières résolutions de système linéaire

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{aligned}
 (S_1) \begin{cases} x + 3y = 4 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases} ; & \quad (S_2) \begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ -5x + 7y = 1 \end{cases} ; & \quad (S_3) \begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 3x + 6y = 15 \end{cases} ; \\
 (S_4) \begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x + 2y - z = 1 \\ 3x + y + 2z = 3 \end{cases} ; & \quad (S_5) \begin{cases} 3x - 2y - 2z = 0 \\ -2x + y + z = 1 \\ 4x + 3y - z = 2 \end{cases} ; & \quad (S_6) \begin{cases} x + 3y + 7z = 0 \\ x + y + z = 1 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \\
 (S_7) \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ x + y + z = 3 \\ 3x + 2y - 4z = 1 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases} ; & \quad (S_8) \begin{cases} u + w = 1 \\ v + w = 0 \\ u + v = 1 \\ 2u + 3v = 0 \end{cases} ;
 \end{aligned}$$

Exercice n°2 Résoudre des systèmes linéaires carrés

Résoudre :

$$(S_1) \begin{cases} x - y + z = 1 \\ -x - y + z = -1 \\ -x - y - z = 1 \end{cases} ; \quad (S_2) \begin{cases} x + 2y - z + 3t = 7 \\ 2x + 4y - 3z + 7t = 19 \\ x + 3y + 3z + t = -1 \\ x - y - 9z + 6t = 10 \end{cases}$$

Exercice n°3 Savoir repérer un SL échelonné et ses variables pivots

Pour chacun des systèmes linéaires suivants, dire s'il est échelonné ou pas.

Dans l'affirmative préciser les pivots et les variables principales et secondaires.

$$\begin{aligned}
 (S_1) \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ \quad 2y + 2z = 1 \\ \quad \quad 2z = 1 \end{cases} & \quad (S_2) \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ \quad \quad \quad z = -3 \\ \quad \quad y + 3z = -1 \end{cases} \\
 (S_3) \begin{cases} 2x - z + 3t = -2 \\ x + 2z + t = 4 \\ \quad y - 2z + t = 0 \end{cases} & \quad (S_4) \begin{cases} 2x + y - z + 3t = 7 \\ \quad \quad \quad z + 2t = 0 \end{cases} \\
 (S_5) \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ \quad 2y - z = -1 \\ \quad \quad y - z = 3 \end{cases} & \quad (S_6) \begin{cases} 2x - z + 3t = 1 \\ \quad y - z + 4t = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Exercice n°4 Savoir résoudre un SL qui est sous forme échelonné

Pour chacun des systèmes échelonnés suivants, déterminer ses pivots et ses variables principales et secondaires, puis le résoudre.

$$\begin{aligned}
 (S_1) \begin{cases} x + y + z = 5 \\ \quad 2y + 2z = 1 \end{cases} & \quad (S_2) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ \quad \quad \quad 2z = 3 \end{cases} \\
 (S_3) \begin{cases} x - y + z + 2t = 1 \\ \quad y - 2z + t = 3 \\ \quad \quad \quad 4z - t = 2 \end{cases} & \quad (S_4) \quad x + y + z = 1
 \end{aligned}$$

Exercice n°5 Savoir résoudre des SL homogènes

Déterminer l'ensemble des solutions du système linéaire suivant :

$$(S_1) \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x - 8y + 7z = 0 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} -2x - 2y - 6z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \quad (S_4) \begin{cases} 3x - y + z - t = 0 \\ x + 2y - z + t = 0 \\ -2x + 3y - 2z + 2t = 0 \\ 5x + 3y - z + t = 0 \end{cases}$$

Exercice n°6 Résoudre des systèmes linéaires avec paramètres dans le second membre

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$(S_1) \begin{cases} x + y + z = a \\ x - y - z = b \\ -3x + y + 3z = c \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} -2x - 3y + 3z = a \\ x + 2y - z = b \\ x + y - 2z = c \end{cases} \quad (S_3) \begin{cases} 2x - 2y + z = a \\ 2x - 3y + 2z = b \\ -x + 2y = c \end{cases}$$

Exercice n°7 Résoudre des systèmes linéaires avec un paramètre dans les coefficients

Déterminer les valeurs de $k \in \mathbb{R}$ pour lesquelles les systèmes suivants sont de Cramer, puis les résoudre en distinguant les cas.

$$\begin{aligned}
 (S_1) \begin{cases} kx + y = 1 \\ x + ky = 1 \end{cases} & \quad (S_2) \begin{cases} x + y + kz = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ kx + y + z = 1 \end{cases} & \quad (S_3) \begin{cases} (1-k)x - y + 2z = 0 \\ x - (1+k)y + 2z = 0 \\ x - y + (2-k)z = 0 \end{cases} \\
 (S_4) \begin{cases} (3-k)x - 2y - z = 0 \\ x - ky - z = 0 \\ 2x - 2y - kz = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Exercice n°8 Résoudre un système non linéaire

Résoudre dans $(\mathbb{R}_+)^3$ le système

$$(S) \begin{cases} x^3 y^2 z^6 = 1 \\ x^4 y^5 z^{12} = 2 \\ x^2 y^2 z^5 = 3 \end{cases}$$