TD n°5 - Généralités sur les fonctions - Inégalités

Exercice n°1 Manipuler des inégalités

Soient x et y deux réels tels que $2 \leq x \leq 4$, $-5 \leq y \leq -3$.
Déterminer le meilleur encadrement possible de $x+y$, $x-y$, $x \times y$ et $\dfrac{x}{y}$.

Exercice n°2 Connaître les différentes méthodes pour montrer une inégalité

Dans chaque cas, vous préciserez la méthode que vous avez utilisé.

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \sqrt{\dfrac{1}{x+3}} \leq \sqrt{\dfrac{1}{x+1}}$
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{2x+1} \leq e^{(x+1)^2}$.
3. (a) Justifier que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leq x \leq x^2+1$.
   (b) Justifier que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 < e^{-x} \leq 1$.
   (c) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leq \dfrac{xe^{-x}}{x^2+1} \leq 1$.
4. Montrer que : $\forall x \in [1;+\infty[,\ x^3 \geq x^2 - x + 1$.
5. Soit $x \in]0;1[$. Montrer que : $\forall t \in [0;x],\ \dfrac{x-t}{1-t} \leq x$.
6. Montrer que : $\forall x \in]-1;+\infty[,\ \dfrac{x}{x+1} \leq \ln(x+1) \leq x$
7. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^\star$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ \dfrac{a}{x} + \dfrac{x}{b} \geq 2\sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

Exercice n°3 Savoir établir un encadrement, une majoration, une minoration par construction

Etablir un encadrement des expressions suivantes :

1. $\dfrac{1}{(6-3x)^2}$ sur $[0;1]$
2. $e^{(1-x)^2}$ sur $[2;4]$
3. $\dfrac{1}{\ln(1-x^2)}$ sur $]0;1[$
4. x^2 sur $[-1;2]$
5. $e^{(1-x)^2}$ sur $[-1;4]$
6. $\dfrac{x+1}{x^2+3}$ sur $[0;2]$

Exercice n°4 Savoir établir un encadrement par une étude de fonction

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+3}$.

1. Etablir le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Répondre de nouveau à la question 6. de l'exercice précédent.

Exercice n°5 Savoir étudier la parité d'une fonction

Que dire de la parité des fonction suivantes ?

$$f(x) = \left(\frac{1}{x^2+1}\right)^2 \times \frac{x^3}{\sqrt{3x^2+5}} \qquad g(x) = x(2x+3)^2\ln(x^2+1) \qquad h(x) = \frac{\ln(x^2)}{e^{x^2}+x^4+2x^2}$$

Exercice n°6 Un peu de tout...

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
   On admet que f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$.
2. Montrer que f est paire.
3. Montrer que : $\forall x \in \mathscr{D}_f,\ f'(x) = \dfrac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$.
4. Etablir le tableau des variation de f.
5. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ -\dfrac{1}{3} \leq f'(x) \leq 0$.
6. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{4} \leq f(x)$.

Exercice n°7 Etudier la monotonie d'une suite récurrente (I)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.

1. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien définie et $2 < u_n < 4$.
2. On cherche à étudier la monotonie de (u_n).
   (a) **Méthode n°1 : en utilisant la monotonie de f**
   A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$. En déduire que (u_n) est strictement décroissante.
   (b) **Méthode n°2 : en étudiant le signe de $f(x) - x$**
   Etudier le signe de $f(x) - x$ sur $]2;4[$. En déduire que (u_n) est strictement décroissante.

Exercice n°8 Etudier la monotonie d'une suite récurrente (II)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n+2}{u_n+2}$.

1. On note $f : x \mapsto \dfrac{3x+2}{x+2}$. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
2. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien définie et $-1 \leq u_n \leq 2$.
3. On cherche à étudier la monotonie de (u_n).
   (a) **Méthode n°1 : en utilisant la monotonie de f**
   A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$. En déduire que (u_n) est croissante.
   (b) **Méthode n°2 : en étudiant le signe de $f(x) - x$**
   Etudier le signe de $f(x) - x$ sur $[-1;2]$. En déduire que (u_n) est croissante.