# TD n°5 - Primitives et équations différentielles linéaires

## Calcul de primitives

**Exercice n°1 Etudier l'existence de primitives et déterminer leur expression**

Pour chacune des fonctions suivantes, étudier l'existence puis déterminer une primitive :

$f_1 : x \mapsto \ln(2)\left(\dfrac{x^3}{2} - 4x + e^{-x/2}\right)$ $\quad f_2 : x \mapsto 2^x$ $\quad f_3 : x \mapsto \dfrac{2}{x^2}$ $\quad f_4 : x \mapsto \sqrt{x}$

$f_5 : x \mapsto \dfrac{1}{1-2x}$ $\quad f_6 : x \mapsto \dfrac{1}{(1-2x)^3}$ $\quad f_7 : x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ $\quad f_8 : x \mapsto \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}$

$f_9 : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ $\quad f_{10} : x \mapsto \cos^2(x)$ $\quad f_{11} : x \mapsto \cos^2(x)\sin(x)$ $\quad f_{12} : x \mapsto \dfrac{\sqrt{\ln(x)}}{x}$

$f_{13} : x \mapsto \cos^3(x)$ $\quad f_{14} : x \mapsto \sin(x)e^{-x}$ $\quad f_{15} : x \mapsto \dfrac{e^x}{1+e^x}$ $\quad f_{16} : x \mapsto \dfrac{1}{1+e^x}$

**Exercice n°2 Techniques pour le calcul de primitive de fonctions rationnelles**

1. **Décomposition en éléments simples :**

   On cherche les primitives de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-2x-3}$.

   (a) Factoriser $x^2 - 2x - 3$.

   (b) Déterminer deux constantes réelles $\alpha$ et $\beta$ telles que :

   $$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;3\}, \quad f(x) = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-3}$$

   (c) En déduire les primitives de $f$ sur $]3;+\infty[$, puis sur $]-1;3[$.

2. **Utiliser la forme canonique d'un polynôme du second degré :**

   (a) Mettre sous forme canonique : $x^2 + 2x + 3$.

   (b) Etudier l'existence de primitives à la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+2x+3}$, puis écrire l'expression de $g$ sous la forme $\lambda\dfrac{u'(x)}{1+u^2(x)}$ où $u$ est une fonction et $\lambda$ une constante à déterminer.

   (c) En déduire les primitives de $g$ (sur quel intervalle ?).

**Exercice n°3 Existence et calcul, suivant $x$, d'une intégrale de fonctions rationnelles**

Etudier l'existence, en fonction de $x$, des intégrales suivantes, puis les calculer.

1. $I_1 : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+3}$ $\quad I_2 : x \mapsto \displaystyle\int_{-2}^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2-3}$ $\quad I_3 : x \mapsto \displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{4t^2+4t+1}$

   $I_4 : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2-t+\frac{5}{2}}$ $\quad I_5 : x \mapsto \displaystyle\int_3^x \frac{\mathrm{d}t}{-t^2+t+2}$

2. $I_6 : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{2t^2+1}\,\mathrm{d}t$ $\quad I_7 : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{2t}{t^2-2t+1}\,\mathrm{d}t$ $\quad I_8 : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t^3-1}$

## Raisonnement par analyse-synthèse

**Exercice n°4 Raisonner par analyse-synthèse pour résoudre une équation fonctionnelle**

1. Un premier exemple guidé. On se propose ici de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant les contraintes :

   $$(C) \quad : \quad f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \text{pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) \times f(y).$$

   Pour résoudre ce problème on raisonne par **analyse-synthèse**.

   (a) **Analyse :** On **suppose** l'existence d'une fonction $f$ vérifiant $(C)$.

      i. Justifier que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f'(x+y) = f(x) \times f'(y)$.

      ii. En posant $a = f'(0)$, déduire de la question précédente qu'il existe une constante réelle $\lambda$ telle que

      $$\left\{\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \lambda\exp(ax) \end{array}\right.$$

      A ce stade, on a montré que, si une fonction vérifie $(C)$ alors elle est **obligatoirement** dans l'ensemble

      $$\{x \longmapsto \lambda\exp(ax) \mid (\lambda,a) \in \mathbb{R}^2\}$$

   (b) **Synthèse :** Déterminer parmi les fonctions candidates

   $$\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda\exp(ax) \end{array}\right.$$

   où $(\lambda,a) \in \mathbb{R}^2$, celles qui vérifient **effectivement** $(C)$.

   (c) **Conclusion :** Ecrire l'ensemble des solutions du problème.

2. Pour chacune des équations fonctionnelles qui suivent, déterminer l'ensemble des fonctions dérivables telles que :

   (a) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$.

   (b) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(xy) = f(x) + f(y)$.

   (c) $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^\star)^2,\ f(xy) = f(x) + f(y)$.

# Equations différentielles linéaires d'ordre 1

**Exercice n°5 Résoudre une EDL d'ordre 1 à coefficient constant**

Soit $(E)$ : $\quad y' + ay = b(t)$ avec $a$ une constante telle que $\boxed{a \neq 0}$.
C'est la forme du second membre qui donne la forme de la solution particulière $f_P$.

- ⋆ Si $b$ est constante, on cherche $f_P$ sous la forme d'une constante.
- ⋆ Si $b$ est polynomiale, on cherche $f_P$ sous la forme d'un polynôme de même degré.
- ⋆ Si $b(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ ou $b(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$, avec $(A, \omega, \varphi) \in \mathbb{R}^3$.
  Alors on cherche $f_P$ sous la forme $B\cos(\omega t + \varphi) + C\sin(\omega t + \varphi)$.
- ⋆ Si $b(t) = P(t)e^{kt}$, avec $P$ polynôme de degré $n$, alors on cherche $f_P$ sous la forme $Q(t)e^{kt}$ avec : $Q$ de degré $n$ si $k \neq -a$ ; $Q$ de degré $n+1$ si $k = -a$.

Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$ :

1. $y' + 2y = 0$ avec $y(0) = 2$
2. $y' + 2y = 2$ avec $y(0) = 0$
3. $y' - 2y = t^2 - 1$
4. $y' + y = \cos(t)$
5. $-y' + 2y = (t-1)e^{-t}$
6. $y' + y = e^{-t} + e^{-2t}$ (utiliser le principe de superposition)

**Exercice n°6 Résoudre une EDL d'ordre 1 à coefficient non constant**

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = y\tan(t)$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$
2. $(t^2+1)y' + 2y = 1$ sur $\mathbb{R}$
3. $ty' + 2y = t^n$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ avec $n \in \mathbb{N}$
4. $(1-t^2)y' - y = 0$ sur $]-1; 1[$
5. $\cos(t)y' - \sin(t)y = \sin(2t)$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$
6. $2t^2y' - 3ty = \sqrt{t}$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ avec $y(1) = -\frac{1}{2}$

# Equations différentielles linéaires d'ordre 2

**Exercice n°7 Résoudre une EDL d'ordre 2 à coeff. constants sans second membre**

Résoudre les équations différentielles suivantes
$(E_1) : y''(t) = y'(t)$ $\qquad (E_2) : y''(t) - 2y(t) = 0$
$(E_3) : y(t) + y''(t) = 2y'(t)$ $\qquad (E_4) : 3y''(t) + y(t) = 0.$

**Exercice n°8 Résoudre une EDL d'ordre 2 à coeff. constants avec second membre**

Résoudre les équations différentielles suivantes :

(a) $(E_1) : y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 1$, avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.
(b) $(E_2) : y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = \sin(t)$.
(c) $(E_3) : y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = e^t\cos(t)$.

**Exercice n°9 Résoudre une EDL d'ordre 2 à l'aide du principe de superposition**

Résoudre les équations différentielles suivantes :

(a) $(E_3) : y''(t) + 2y'(t) + y(t) = \mathrm{sh}(t)$, avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.
(b) $(E_2) : y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = \sin^2(t)$.

**Exercice n°10 Résoudre une EDL d'ordre 2 à coefficients non constants**

L'objectif est de résoudre l'équation différentielle d'ordre deux à coefficients non constants suivante

$$(E)\ :\ \forall t > 0,\ t^2y''(t) - ty(t) + y(t) = t^2.$$

1. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $z(x) = y(e^x)$.
   (a) Calculer $z'$ et $z''$.
   (b) Montrer que $y$ est solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $z$ est solution d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants que l'on déterminera.
2. En déduire les solutions de $(E)$.

**Exercice n°11 Résoudre une EDL d'ordre 2 à coefficients non constants**

Résoudre l'équation $(F) : (1-t^2)y''(t) - ty'(t) + y(t) = 0$ sur $]-1, 1[$.

# Applications en physique

**Exercice n°12**

1. **Problème n°1 :** Un corps à température $T_1$ est plongé à l'instant $t = 0$ dans un milieu à température $T_0$. On néglige la variation de température initiale provoquée par le corps. On admet que la température de ce corps suit la loi :

   $\boxed{\tau \times \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = T_0 - T}$, avec $\tau > 0$ un paramètre fixe, dépendant du corps et du milieu.

   Exprimer $T$ en fonction de $t$, puis calculer sa limite quand $t$ tend vers $+\infty$.
2. **Problème n°2 :** On considère un mobile en chute dans un milieu dans lequel il subit des frottements. On suppose que sa vitesse vérifie l'équation suivante : $\boxed{(E) \quad mv' = -kv^2 + mg}$, où $m$ est la masse du mobile, et $k$ la résistance du milieu.
   (a) Déterminer une solution de $(E)$ qui soit constante, on la notera $v_0$ dans la suite.
   (b) En notant $y = \frac{1}{v - v_0}$, trouver une équation différentielle vérifiée par $y$, puis en déduire $v$.