

TD n°5 - Récurrences - Sommes et produits

Raisonnement par récurrence

Exercice n°1 Démontrer une majoration/minoration des termes d'une suite

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 1$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

Exercice n°2 Justifier l'expression explicite d'une suite si elle est donnée

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = -3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5 - 4u_n$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-4)^{n+1} + 1$.

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 6$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 12 \left(\frac{1}{2}\right)^n - 6$.

3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 - 2$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (2 - \sqrt{3})^{2^n} + (2 + \sqrt{3})^{2^n}$.

Exercice n°3 Savoir démontrer un résultat par récurrence double

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^{\geq 1}}$ la suite définie par $u_1 = 0$, $u_2 = -9$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (1 - n)3^n$.

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = -1$, $u_1 = -1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n - 2^{n+1}$.

Exercice n°4 Démontrer une inégalité par récurrence

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 2}, n + 1 < 2^n$.

2. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, (1 + a)^n \geq 1 + na$.

Exercice n°5 Justifier qu'une suite récurrente d'ordre 1 est bien définie

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n - 1}$.

Calculer les 5 premiers termes de cette suite.

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} - 1$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ est défini et $u_n \geq 1$.

*Ici la propriété $\mathcal{P}(n)$ est "u_n est bien défini et u_n ≥ 1"
(deux propriétés à démontrer simultanément)*

3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{u_n + 1}$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ est défini (i.e. existe) et $u_n \geq 2$.

*Ici la propriété $\mathcal{P}(n)$ est "u_n est bien défini et u_n > 2"
(deux propriétés à démontrer simultanément)*

Sommes

Exercice n°6 Comprendre et utiliser le symbole \sum

Ecrire sans le symbole \sum les expressions suivantes :

$$\sum_{k=1}^5 k^2 \quad \sum_{j=3}^7 \frac{j^2}{3^j} \quad \sum_{n=1}^5 (-1)^{n^2} \frac{x^{2n+4}}{n} \quad \sum_{p=3}^5 x(1-x^2)^p \text{ où } x \in \mathbb{R}$$

Exercice n°7 Comprendre et utiliser le symbole \sum

Ecrire à l'aide du symbole \sum les expressions suivantes :

1. $3^4 + 3^5 + 3^6 + \dots + 3^{15}$
2. $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots + \frac{10}{1024}$
3. $2 - 4 + 6 - 8 + \dots + 50$
4. $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n}$ où $x \in \mathbb{R}$

Exercice n°8 Calculs de sommes arithmétiques, géométriques

Reconnaître une somme arithmétique ou géométrique et donner sa valeur

On considère $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $q \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$(a) \sum_{k=5}^{11} k \quad (b) \sum_{k=1}^n k \quad (c) \sum_{k=3}^{23} 4 \quad (d) \sum_{k=0}^n \lambda \quad (e) \sum_{i=5}^{11} (3 + 5i) \quad (f) \sum_{k=5}^{11} \frac{2^k}{3}$$

$$(g) \sum_{k=3}^{125} \frac{48}{2^k} \quad (h) \sum_{k=0}^n q^k \quad (i) \sum_{k=5}^{11} \frac{3^k}{2^{2k}}$$

Exercice n°9 Justifier l'expression explicite d'une somme si elle est donnée

1. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1}, \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1}, \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^n (2k-1)$$

(a) Calculer les quatre premiers termes de la suite $(S_n)_{n \geq 1}$.

(b) Conjecturer une formule simple pour S_n et la démontrer par récurrence sur $\mathbb{N}^{\geq 1}$.

Exercice n°10 Utiliser les propriétés de \sum pour réaliser des calculs

Calculer les sommes suivantes :

1. **Utiliser la linéarité :**

$$A_n = \sum_{n=1}^N (5 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^{2n}), \quad B_n = \sum_{j=1}^n (2j-1), \quad C_n = \sum_{k=1}^{2n} k(2k-1)(k+1)$$

2. **Utiliser la relation de Chasles :**

$$D_n = \sum_{k=n}^{2n} k^2$$

3. **Utiliser un changement d'indice :**

$$E_n = \sum_{k=3}^n (k-2)^2, \quad F_n = \sum_{k=1}^n (n-k)^2, \quad G_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$$

Exercice n°11 Repérer puis calculer une somme télescopique

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$.

(b) En déduire la valeur, en fonction de n , de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

2. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $2k+1 = (k+1)^2 - k^2$.

(b) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $\sum_{k=1}^n (2k+1)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=1}^n k.k!$ en fonction de n (*Indication* : $(k+1)! - k! = \dots$).

Exercice n°12 Savoir calculer une somme double

Calculer les sommes suivantes :

$$A = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j) \quad B = \sum_{1 \leq i, j \leq n} 2^{i+j} \quad C = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 2^j$$

Produits**Exercice n°13 Manipuler des factoriels**

1. Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Les égalités suivantes sont-elles vraies ? Justifier.

$$(n+1)! = (n+1)n! \quad n! = n(n-1)! \quad (n+2)! = (n+2)(n+1)! = (n+2)(n+1)n!$$

2. Simplifier les expressions suivantes :

$$A_n = n \frac{1}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}^{\geq 1} \quad B = n(n-1) \frac{1}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}^{\geq 2} \quad C = \frac{(2n)!}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Exercice n°14 Savoir calculer des produits simples

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les produits suivants :

$$A_n = \prod_{k=0}^n 3, \quad B_n = \prod_{k=0}^n (3k), \quad C_n = \prod_{k=0}^n 5^k, \quad D_n = \prod_{k=1}^n \frac{k}{k+1}.$$

Exercice n°15 Savoir calculer des produits classiques

Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

1. Ecrire à l'aide du symbole \prod le produit P_n des n premiers entiers pairs, puis I_n des n premiers entiers impairs.

2. Ecrire P_n et I_n en fonction de n uniquement à l'aide de la notation factorielle.

Exercice n°16 Produits intervenant dans des formules classiques

1. Soient $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$.

Montrer par récurrence sur \mathbb{N} la propriété :

$$\ln \left(\prod_{k=1}^n a_k \right) = \sum_{k=1}^n \ln(a_k).$$

2. Soient $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

Montrer par récurrence sur \mathbb{N} la propriété :

$$\exp \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) = \prod_{k=1}^n \exp(a_k).$$

3. *Application* : Donner une expression (sans les symboles \sum et \prod) en fonction de $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ des expressions suivantes :

$$R_n = \prod_{k=1}^n e^k \quad S_n = \sum_{k=1}^n \ln(k)$$