TD n°6 - Systèmes linéaires

Matrices ERL et rang

Exercice n°1 Déterminer la matrice ERL

Par opérations élémentaires sur les lignes, trouver la matrice ERL associée aux matrices suivantes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 15 & -12 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0,5 & 1 & 0,5 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

A quelle étape de l'algorithme pouvait-on trouver le rang ?

Exercice n°2 Déterminer le rang d'une matrice à paramètres

Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$. Déterminer, suivant les scalaires a et b, le rang des matrices suivantes :

$$I = \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \\ a & a \end{bmatrix} \qquad J = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \qquad K = \begin{bmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{bmatrix}$$

Exercice n°3 Déterminer le rang d'une matrice

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Déterminer le rang de la matrice carrée $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ telle que :

$$\forall i \neq j, \quad a_{i,j} = 1 \text{ et } \forall i \in [\![1;n]\!],\ a_{i,i} = 0.$$

Résolution de systèmes linéaires

Exercice n°4 Résoudre un système à paramètres

Résoudre, suivant les valeurs de $(\lambda, a, b, c) \in \mathbb{K}^4$:

$$(S_1) \begin{cases} \lambda x + y = \lambda + 1 \\ x + \lambda y = 2 \end{cases} \qquad (S_2) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + \lambda z = 3 \\ x + \lambda y + 3z = 2 \end{cases} \qquad (S_3) \begin{cases} x + 2y - z = a \\ -2x - 3y + 3z = b \\ x + y - 2z = c \end{cases}$$

Exercice n°5 Résoudre des systèmes rectangulaires ou carrés

Résoudre les systèmes :

$$(S_1) \begin{cases} x + y + 2z + 3t = 1 \\ x + y + z - t = 2 \end{cases} \qquad (S_2) \begin{cases} x + 4y + 3z + t = 1 \\ 2x + 5y + 4z - t = 4 \\ x - 3y - 2z + 3t = 5 \end{cases} \qquad (S_3) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -x + y + z = 1 \\ 3x - 2y + 4z = 4 \\ 2x + 4y + 3z = 2 \end{cases}$$

$$(S_4) \begin{cases} x + 2y + z - t = 0 \\ x - y + z + t = 1 \\ 2x + y + 3z - t = 2 \\ x + y + 2z + t = 1 \end{cases}$$

Systèmes linéaires et géométrie du plan et de l'espace

Dans les exercices qui suivent, le plan (resp. l'espace) est rapporté à un ROND.

Exercice n°6 Résoudre un système dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

Trouver l'ensemble des solutions éventuelles des systèmes suivants et donner une interprétation géométrique de cet ensemble.

$$(S_1) \begin{cases} 3x - 6y = 1 \\ -2x + 4y = 3 \end{cases} \qquad (S_2) \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases} \qquad (S_3) \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x - 5y = 3 \\ -x + 11y = -5 \end{cases}$$

$$(S_4) \begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 3x + 2z = 1 \\ -2x + y - z = 0 \end{cases}$$

Exercice n°7 Représentations paramétriques de droites de l'espace

Soient deux droites de représentation paramétrique :

$$(d_1) \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 9 + 3t \\ z = 2 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (d_2) \begin{cases} x = 0,5 + 2t \\ y = 4 + t \\ z = 4 - t \end{cases}$$

1. Ces deux droites sont-elles parallèles ?
2. Ces deux droites sont-elles concourantes ?

Exercice n°8 Intersection de plans

Soit $m \in \mathbb{R}$ fixé.
On considère les plans (P_1), (P_2) et (P_3) d'équations respective :

$$\begin{array}{lcl} (P_1) & : & x + my + z = 0 \\ (P_2) & : & mx + y - mz = 0 \\ (P_3) & : & x - my + z = 0 \end{array}$$

1. Discuter suivant les valeurs du paramètre m la nature de $(P_1) \cap (P_2)$.
2. Représenter les 3 plans lorsque $m = 0$. Conjecturer alors la nature de $(P_1) \cap (P_2) \cap (P_3)$. Prouver cette conjecture.
3. Déterminer le rang du système constitué des 3 équations. A quelle condition est-il de Cramer ? Le résoudre dans ce cas, et en déduire une interprétation géométrique de la solution.