TD n°6 - Généralités sur les fonctions - Inégalités

Exercice n°1 Connaître les différentes méthodes pour montrer une inégalité

Dans chaque cas, vous préciserez la méthode utilisée.

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \sqrt{\dfrac{1}{x+3}} \leq \sqrt{\dfrac{1}{x+1}}$
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{2x+1} \leq e^{(x+1)^2}$.
3. (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leq x \leq x^2+1$.
   (b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leq \dfrac{xe^{-x}}{x^2+1} \leq 1$.
4. Soit $x \in]0;1[$. Montrer que : $\forall t \in [0;x],\ \dfrac{x-t}{1-t} \leq x$.
5. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^\star$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ \dfrac{a}{x} + \dfrac{x}{b} \geq 2\sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

Exercice n°2 Savoir établir un encadrement, une majoration, une minoration

Encadrer les expressions suivantes :

1. $\dfrac{1}{(6-3x)^2}$ sur $[0;1]$
2. $e^{(1-x)^2}$ sur $[2;4]$
3. $\dfrac{1}{\ln(1-x^2)}$ sur $]0;1[$
4. x^2 sur $[-1;2]$
5. $e^{(1-x)^2}$ sur $[-1;4]$
6. $\dfrac{x+1}{x^2+3}$ sur $[0;2]$

Exercice n°3 Savoir montrer qu'une fonction possède un maximum, un minimum

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+3}$.

1. Etablir le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Répondre de nouveau à la question 6. de l'exercice précédent.
3. La fonction f est-elle bornée sur $\mathbb{R}$?
4. Dire si f admet un minimum et un maximum. En cas d'existence, donner l'extremum ainsi que le (ou les) point(s) en le(s)quel(s) il est atteint.

Exercice n°4 Savoir étudier la parité d'une fonction

1. Que dire de la parité des fonction suivantes ?

$$f(x) = \left(\frac{1}{x^2+1}\right)^2 \times \frac{x^3}{\sqrt{3x^2+5}} \qquad g(x) = x(2x+3)^2\ln(x^2+1) \qquad h(x) = \frac{\ln(x^2)}{e^{x^2}+x^4+2x^2}$$

2. Montrer que la fonction $i(x) = \ln\left[\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2\right]$ est impaire.

Exercice n°5 Savoir utiliser la parité pour étudier une fonction

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
   On admet que f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$.
2. Montrer que f est paire.
3. Montrer que : $\forall x \in \mathscr{D}_f,\ f'(x) = \dfrac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$.
4. Etablir le tableau des variation de f.
5. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ -\dfrac{1}{3} \leq f'(x) \leq 0$.
6. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{4} \leq f(x)$.

Exercice n°6 Etudier une suite récurrente (I)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien définie et $2 \leq u_n \leq 4$.
2. En raisonnant par récurrence sur $\mathbb{N}$, montrer que (u_n) est strictement décroissante.

Exercice n°7 Déterminer un ensemble image

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto 2x^3 - 3x^2 + 1$.

Déterminer l'ensemble image $J = f(I)$ dans chacun des cas qui suivent, puis traduire l'égalité $J = f(I)$ obtenue en termes d'inégalités :

1. $I =]0;1]$
2. $I =]0;2[$
3. $I = [-1;1[$

Exercice n°8 Etudier une suite récurrente (II) : les intervalles de stabilité

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \dfrac{3}{4}x^2 - 2x + 3$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = x$.
   Les éventuelles solutions de cette équation s'appelle les points fixes de f.
2. Etablir le tableau de variation de f. Trouver les antécédents de 2 par f.
3. Etudier la stabilité des intervalles : $\left]-\infty;\dfrac{2}{3}\right]$, $\left[\dfrac{2}{3};\dfrac{4}{3}\right]$, $\left[\dfrac{4}{3};2\right]$, $\left[\dfrac{2}{3};2\right]$, $[2;+\infty[$.
4. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n^2 - 2u_n + 3$.
   (a) Supposons que $u_0 = 4$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq u_n$ et que (u_n) est croissante.
   (b) Supposons que $u_0 = \dfrac{5}{3}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{4}{3} \leq u_n \leq 2$ et que (u_n) est croissante.