TD n°6 - Limite d'une suite

Exercice n°1 Savoir déterminer la limite d'une suite définie explicitement

Dans chacun des cas, déterminer (si elle existe) la limite de la suite (u_n) :

1) $u_n = \dfrac{6}{5n^2+3}$
2) $u_n = 4 + \left(-\dfrac{1}{5}\right)^n$
3) $u_n = \dfrac{3^n}{2^n}$
4) $u_n = \dfrac{-2n}{\sqrt{n}+5}$
5) $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(-\dfrac{1}{4}\right)^k$
6) $u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$
7) $u_n = n3^n - 3^{n+1}$
8) $u_n = \dfrac{\sqrt{9n^2+1}}{2n+4}$
9) $u_n = \dfrac{2^n}{7^n+1}$
10) $u_n = \sqrt{4n^2+n} - n$
11) $u_n = \dfrac{5^n+2^n}{5^n-2^n}$
12) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Exercice n°2 Utiliser le théorème d'encadrement pour étudier une suite définie par une somme

1. On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2+k}$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Montrer que, pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $\dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{n}{n^2+k} \leq \dfrac{n}{n^2+1}$.
   (b) En déduire que : $\dfrac{n}{n+1} \leq u_n \leq \dfrac{n^2}{n^2+1}$.
   (c) Conclure quant au comportement asymptotique de la suite (u_n).
2. En réalisant une approche similaire à celle de la question précédente, montrer que la suite (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, par $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \dfrac{k}{n^2+k}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice n°3 Utiliser le théorème d'encadrement pour étudier une suite définie par une somme

Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

1. Etudier la monotonie de (H_n).
   Que peut-on en déduire concernant le comportement asymptotique de (H_n) ?
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\ln(1+x) \leq x$.
3. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $\ln(k+1) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$.
4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $\ln(n+1) \leq H_n$.
5. Conclure quant au comportement asymptotique de la suite (H_n).

Exercice n°4 Utiliser la monotonie pour étudier une suite définie par une somme

Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$.

1. Etudier la monotonie de (u_n).
2. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, $\dfrac{1}{k(k+1)} \leq \dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k(k-1)}$.
3. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$.
4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{n+1} \leq u_n \leq 2 - \dfrac{1}{n}$.
5. En déduire que (u_n) converge et donner un encadrement de sa limite.

Exercice n°5 Justifier qu'une suite récurrente convergente et déterminer sa limite

On considère (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : x \mapsto \sqrt{2+x}$ est définie sur $[-2; +\infty[$.

On a vu au chapitre précédent que :

- (u_n) est bien définie ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq u_n \leq 4$;
- (u_n) est décroissante.

1. Justifier que (u_n) converge.
2. Résoudre dans $[2; +\infty[$ l'équation $f(x) = x$.
3. Déterminer la limite de (u_n). Justifier **soigneusement**.

Exercice n°6 Déterminer la limite d'une suite définie par itérations

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, par $u_n = \underbrace{\sqrt{9+\sqrt{9+\sqrt{9+\ldots\sqrt{9}}}}}_{n \text{ fois}}$.

Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice n°7 Justifier qu'une suite récurrente diverge vers ∞

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1$.

1. Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > n$.
   En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède pour limite $+\infty$.
2. On utilise une autre méthode pour étudier le comportement asymptotique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. En déduire que (u_n) possède une limite.
   (b) En raisonnant par l'absurde, montrer que (u_n) diverge avec pour limite $+\infty$.
   Rédiger **soigneusement**.

Exercice n°8 Etude complète guidée d'une suite récurrente : cas f croissante

On considère (u_n) la suite définie par $u_0 = -\dfrac{3}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + 4u_n + 2$.

1. Déterminer les variations de la fonction $f : x \mapsto x^2 + 4x + 2$, définie sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les points fixes de f et étudier le signe de la fonction $x \mapsto f(x) - x$.
   Compléter le tableau de variation avec les points fixes trouvés.
3. Réaliser le schéma en escalier associé à cette suite et conjecturer le comportement asymptotique de (u_n).
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-2 < u_n < -1$.
5. Prouver que (u_n) est décroissante. En déduire que (u_n) possède une limite et la déterminer.
6. Dans cette question on suppose que $u_0 = -\dfrac{1}{2}$.
   (a) Conjecturer le comportement asymptotique de (u_n).
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 < u_n$.
   (c) Prouver que (u_n) est croissante. En déduire que (u_n) possède une limite.
   (d) En raisonnant par l'absurde, montrer que (u_n) diverge avec pour limite $+\infty$.
   Rédiger **soigneusement**.

Exercice n°9 Etude complète guidée d'une suite récurrente : cas f décroissante

1. Montrer que $\sqrt{2} = 1 + \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$. *On peut alors écrire :*

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+\sqrt{2}}} \qquad \sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}} \qquad \sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}}}$$

Ce procédé itératif suggère l'écriture « infinie » $$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}}}$$

Pour formaliser cette écriture, on va poser $\left\{ \begin{array}{cccc} f : &]-1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 1 + \dfrac{1}{1+x} \end{array} \right.$

et introduire la suite (u_n) définie par : $\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{array} \right.$

On admet que (u_n) est bien définie.

2. (a) Justifier que f est décroissante et que son unique point fixe est $\sqrt{2}$.
   (b) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2$.
   (c) Exprimer u_{2n+2} en fonction de f et de u_{2n}.
   (d) En déduire, par récurrence, que la suite (u_{2n}) est minorée par $\sqrt{2}$ et décroissante.
   (e) Justifier soigneusement que (u_{2n}) converge vers $\sqrt{2}$.
   (f) En déduire que (u_{2n+1}) converge vers $\sqrt{2}$.
   (g) Conclure quant à la convergence de (u_n).

Exercice n°10 Utiliser le théorème des suites adjacentes

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad ; \quad v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}$$

1. Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
2. Conclure.

Exercice n°11 Suites extraites des indices pairs et impairs

On considère la suite (S_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}.$$

1. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geq 1}$ sont adjacentes.
2. Conclure quant au comportement asymptotique de (S_n).