TD n°6 - Systèmes linéaires

Exercice n°1 Premières résolutions de système linéaire

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$(S_1)\begin{cases} x+3y=4 \\ 5x+3y=2 \end{cases} ;\quad (S_2)\begin{cases} 2x-3y=2 \\ 5x+7y=1 \end{cases} ;\quad (S_3)\begin{cases} 2x+4y=10 \\ 3x+6y=15 \end{cases} ;$$

$$(S_4)\begin{cases} 2x-y+z=2 \\ x+2y-z=1 \\ 3x+y+2z=3 \end{cases} ;\quad (S_5)\begin{cases} 3x-2y-2z=0 \\ -2x+y+z=1 \\ 4x+3y-z=2 \end{cases} ;$$

$$(S_6)\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ x+y+z=3 \\ 3x+2y-4z=1 \\ -x-y+2z=0 \end{cases} ;\quad (S_7)\begin{cases} u+w=1 \\ v+w=0 \\ u+v=1 \\ 2u+3v=0 \end{cases} ;\quad (S_8)\begin{cases} x+3y+7z=0 \\ x+y+z=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases} .$$

Exercice n°2 Résoudre des systèmes linéaires carrés

Résoudre :

$$(S_1)\begin{cases} x-y+z=1 \\ -x-y+z=-1 \\ -x-y-z=1 \end{cases} ;\quad (S_2)\begin{cases} x+2y-z+3t=7 \\ 2x+4y-3z+7t=19 \\ x+3y+3z+t=-1 \\ x-y-9z+6t=10 \end{cases}$$

Exercice n°3 Savoir repérer un SL échelonné et ses variables pivots

Pour chacun des systèmes linéaires suivants, dire s'il est échelonné ou pas.
Dans l'affirmative préciser les pivots et variables secondaires.

$$(S_1)\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2y+2z=1 \\ 2z=1 \end{cases} \quad (S_2)\begin{cases} x+2y-z=2 \\ z=-3 \\ y+3z=-1 \end{cases}$$

$$(S_3)\begin{cases} 2x-z+3t=-2 \\ x+2z+t=4 \\ y-2z+t=0 \end{cases} \quad (S_4)\begin{cases} 2x+y-z+3t=7 \\ z+2t=0 \end{cases}$$

$$(S_5)\begin{cases} 2x-y+z=1 \\ 2y-z=-1 \\ y-z=3 \end{cases} \quad (S_6)\begin{cases} 2x-z+3t=1 \\ y-z+4t=0 \end{cases}$$

Exercice n°4 Savoir résoudre un SL qui est sous forme échelonné

Pour chacun des systèmes échelonnés suivants, déterminer ses variables pivots et secondaires, puis le résoudre.

$$(S_1)\begin{cases} x+y+z=5 \\ 2y+2z=1 \end{cases} \quad (S_2)\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2z=3 \end{cases}$$

$$(S_3)\begin{cases} x-y+z+2t=1 \\ y-2z+t=3 \\ 4z-t=2 \end{cases} \quad (S_4)\ x+y+z=1$$

Exercice n°5 Savoir résoudre des SL homogènes

Déterminer l'ensemble des solutions du système linéaire suivant :

$$(S_1)\begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases} \quad (S_2)\begin{cases} -2x-2y-6z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases} \quad (S_4)\begin{cases} 3x-y+z-t=0 \\ x+2y-z+t=0 \\ -2x+3y-2z+2t=0 \\ 5x+3y-z+t=0 \end{cases}$$

Exercice n°6 Résoudre des systèmes linéaires avec paramètres dans le second membre

Soient $a,b,c\in\mathbb{R}$. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$(S_1)\begin{cases} x+y+z=a \\ x-y-z=b \\ -3x+y+3z=c \end{cases} \quad (S_2)\begin{cases} -2x-3y+3z=a \\ x+2y-z=b \\ x+y-2z=c \end{cases} \quad (S_3)\begin{cases} 2x-2y+z=a \\ 2x-3y+2z=b \\ -x+2y=c \end{cases}$$

Exercice n°7 Résoudre des systèmes linéaires avec un paramètre dans les coefficients

Déterminer les valeurs de $k\in\mathbb{R}$ pour lesquelles les systèmes suivants sont de Cramer, puis les résoudre en distinguant les cas.

$$(S_1)\begin{cases} kx+y=1 \\ x+ky=1 \end{cases} \quad (S_2)\begin{cases} x+y+kz=1 \\ x+ky+z=1 \\ kx+y+z=1 \end{cases} \quad (S_3)\begin{cases} (1-k)x-y+2z=0 \\ x-(1+k)y+2z=0 \\ x-y+(2-k)z=0 \end{cases}$$

$$(S_4)\begin{cases} (3-k)x-2y-z=0 \\ x-ky-z=0 \\ 2x-2y-kz=0 \end{cases}$$

Exercice n°8 Résoudre un système non linéaire

Résoudre dans $(\mathbb{R}_+)^3$ le système

$$(S)\begin{cases} x^3y^2z^6=1 \\ x^4y^5z^{12}=2 \\ x^2y^2z^5=3 \end{cases}$$