

TD n°7 - Compléments sur les fonctions usuelles

Fonctions puissances réelles

Exercice n°1 Savoir réécrire l'expression d'une fonction puissance

Réécrire et, éventuellement, simplifier les expressions suivantes à l'aide des fonctions exp et ln. On ne se souciera pas de l'existence de ces expressions.

$$x^{\frac{1}{x}} \quad \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad x^{\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}} \quad (\exp(x^2))^{\frac{\ln(x^{1/x})}{x}}$$

Exercice n°2 Résoudre une (in)équation faisant intervenir une fonction puissance

Résoudre dans \mathbb{R} les (in)équations suivantes :

$$(E_1) : x^{5/3} = 3 \quad (E_2) : 10^{x-1} = 2^{x+1} \quad (E_3) : 0,8^x \leq 0,1 \quad (E_4) : x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$$

Exercice n°3 Dérivée une fonction du type $x \mapsto f(x)^{g(x)}$

Déterminer le domaine de définition et la dérivée des fonctions définies par les expressions suivantes. On ne se souciera pas de l'ensemble de dérivabilité de ces fonctions.

$$a : x \mapsto x^{2/3} \quad b : x \mapsto 4^{x+1} \quad c : x \mapsto (\ln x)^{\ln x} \quad d : x \mapsto (2x-1)^{\sqrt{x}}$$

Exercice n°4 Etudier les variations d'une fonction du type $x \mapsto f(x)^{g(x)}$

Etudier, sur leur ensemble de définition, les variations des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto x^{\sqrt{x}} \quad g : x \mapsto x^{\ln x} \quad h : x \mapsto x^{1+\frac{1}{x}}$$

Fonctions valeur absolue

Exercice n°5 Représenter le graphe d'une fonction faisant intervenir $|\cdot|$

- (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Ecrire sans valeur absolue la quantité $|x+4| - |2x-6|$.
(b) Tracer avec grand soin le graphe de la fonction $x \mapsto |x+4| - |2x-6|$.
- De même tracer avec grand soin le graphe de la fonction $x \mapsto |x+2| - |x^2-1|$.
- Soit $f : x \mapsto x^2 - 1$ définie sur \mathbb{R} .
 - Représenter sur un même graphique la courbe représentative de f et celle de $-f$.
 - En déduire une représentation de $|f|$.
 - Comment, connaissant le graphe d'une fonction f , peut-on obtenir le graphe de $|f|$?

Exercice n°6 Résoudre des (in)équations faisant intervenir $|\cdot|$

1. Résoudre les (in)équations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivantes :

$$(a) |x+2| = 0, \quad (b) |2x-3| = 1, \quad (c) |-x+3| > 5 \quad (d) |3x-8| \leq 20,$$

2. Résoudre algébriquement les (in)équations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivantes :

$$(a) |-2x^2 + x + 1| = 3, \quad (b) |x^2 - 2| \geq 1.$$

Exercice n°7 Résoudre une équation du type $|x| = |y|$

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

$$(a) |x+3| = |x+7|, \quad (b) |-3x^2 + 2x + 1| = |-5x^2 + 4x - 2|.$$

Fonction partie entière

Exercice n°8 Résoudre des équations avec une partie entière

- Résoudre l'équation $[3x-1] = 5$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
- Résoudre l'équation $[x^2 - 5x + 6] = 2$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
- Résoudre l'équation $[|2x-1|] = 3$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.