TD n°7 - Ensembles de nombres

L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$

Exercice n°1 Raisonner par récurrence simple, double, forte

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^n - 1$ est pair.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.
3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On considère la suite (u_n) définie par :
   $u_0 = 1$, $u_1 = \cos\theta$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2\cos\theta u_{n+1} - u_n$.

   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \cos(n\theta)$.
4. Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, $u_n = 3^{n-2}$.
   Retrouver ce résultat en établissant une relation directe entre u_{n+1} et u_n.
5. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{n-1} \leq u_n$.

Exercice n°2 Simplifier des fractions

1. Déterminer le pgcd de 3696 et de 1188 :
   - grâce à l'algorithme d'Euclide
   - grâce à la décomposition en facteurs premiers.
2. Déterminer leur ppcm de deux façons différentes.
3. En déduire la forme irréductible des nombres : $\dfrac{3696}{1188}$ et $\dfrac{5}{3696} - \dfrac{31}{1188}$.

Exercice n°3 Résoudre des équations avec des pgcd et des ppcm

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Déterminer les entiers naturels non nuls n tels que si l'on divise 4373 et 826 par n, on obtienne respectivement 8 et 7 comme restes.
2. Déterminer les entiers naturels non nuls n tels que :
   $$\text{ppcm}(28, n) = 140.$$
3. Déterminer les couples d'entiers a et b non nuls tels que :
   $$\text{pgcd}(a, b) = 42 \quad \text{et} \quad \text{ppcm}(a, b) = 1680.$$

Exercice n°4 Montrer qu'un nombre entier n'est pas premier

1. Soit $n \geq 2$. Montrer qu'aucun des entiers de l'intervalle $[\![n! + 2; n! + n]\!]$ n'est premier.
   Quelle propriété peut-on énoncer concernant la répartition des nombres premiers ?
2. Quels sont les quatre plus petits entiers consécutifs qui soient tous non premiers ?

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$

Exercice n°5 Déterminer la nature de nombres

La nature d'un nombre est le plus petit ensemble auquel il appartient, parmi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.
Déterminer la nature des nombres suivants :

$$\alpha = e^{-\frac{1}{2}\ln 9} \qquad \beta = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \qquad \gamma = \frac{\arcsin(-1)}{\arccos(-1)} \qquad \delta = \frac{1 + \frac{1}{120}}{\frac{1}{15} + 0,3}$$

En fonction de $k \in \mathbb{Z}$: $\varepsilon_k = \sin\left(\dfrac{k\pi}{3}\right)$.

Exercice n°6 Raisonner par l'absurde pour déterminer la nature d'un nombre

Montrer que $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ est un nombre irrationnel.

Exercice n°7 Déterminer des bornes ou des extremums

Déterminer lorsqu'ils existent : un majorant, un minorant, le maximum, le minimum, la borne sup, la borne inf :

$$A = \{\arctan(x)\,;\, x \in \mathbb{R}\} \quad B = \left\{\frac{1}{x}\,;\, x \in [1; +\infty[\right\} \quad C = \left\{t - t^2\,;\, t \in \mathbb{R}\right\} \quad D = \left\{|t - t^2|\,;\, t \in \mathbb{R}\right\}$$

$$E = \left\{e^{-n}\,;\, n \in \mathbb{N}\right\} \quad F = \left\{\frac{1}{n} + (-1)^n\,;\, n \in \mathbb{N}^\star\right\}$$

Exercice n°8 Manipuler des bornes supérieures et inférieures

Les deux questions qui suivent sont indépendantes.

1. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que : $\forall (a, b) \in A \times B$, $a \leq b$.
   Montrer que $\sup(A)$ et $\inf(B)$ existent et que $\sup(A) \leq \inf(B)$.
2. Soit A une partie non vide bornée de $\mathbb{R}$. On note $-A = \{-a\,;\, a \in A\}$.
   Montrer que $\sup(-A) = -\inf(A)$.

Exercice n°9 Manipulation de parties entières

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\left\lfloor \dfrac{n-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{n+2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{n+4}{4} \right\rfloor = n$.

   Indication : on pourra raisonner par disjonction de cas suivant le reste de la division euclidienne de n par 4.
2. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Exercice n°10 Résoudre une équation fonctionnelle

On cherche les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissantes telles que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y)$.
On considère f une hypothétique solution.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$.
   En déduire que, pour tous $n \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$.
3. Montrer que, pour tout $q \in \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{R}$, $f(qx) = qf(x)$.
4. En utilisant la croissance de f, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xf(1)$. Conclure.

   Considérer les approximations à la précision 10^{-n} de x par défaut et par excès.