

TD n°7 - Matrices

Exercice n°1 Se repérer dans une matrice

On considère les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

On note $a_{i,j}$ (resp. $b_{i,j}$ et $c_{i,j}$) le terme général de la matrice A (resp. B et C).

1. Quelles sont les tailles des trois matrices ?
2. Donner les valeurs de $a_{1,2}$, $a_{2,1}$, $b_{3,1}$, $b_{1,3}$, $c_{2,1}$ et $c_{1,2}$.
3. Remplacer les points des relations ci-dessous par les indices convenables (trouver toutes les bonnes réponses) :

$$b_{,..} = 1, \quad a_{1,..} = 1, \quad c_{1,..} + c_{.,1} = 4$$

Exercice n°2 Savoir écrire une matrice

Ecrire les matrices suivantes :

$$A = (i+j)_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 3}} \quad B = ((-1)^{i+j})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}} \quad C = (\max(i,j))_{\substack{1 \leq i \leq 5 \\ 1 \leq j \leq 4}}$$

Exercice n°3 Savoir utiliser les opérations matricielles

Calculer, lorsque cela est possible $2A - 3B$, AB , BA et tB dans les cas suivants :

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$.
3. $A = [2 \ 1 \ 0]$ et $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Exercice n°4 Savoir réaliser des produits de matrices

Calculer les produits de matrices suivants :

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \times [2 \ 5 \ 1] \times \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times [-2 \ 3 \ -1]$$

Exercice n°5 Identités algébriques remarquables

On considère les matrices : $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Calculer et comparer $A^2 + 2AB + B^2$ et $(A+B)^2$.
2. Calculer et comparer $A^2 - B^2$, $(A+B)(A-B)$ et $(A-B)(A+B)$.

Exercice n°6 Manipulations les opérations dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Développer et simplifier les expressions suivantes :

1. $S = (3A)(2B) - (A+2B)^2 + (A-B) \times (A+B)$.
2. $T = (A+B)(2A^2 - 2B) - 2A^2(A+B) + (-A+B)^2$.

Exercice n°7 Connaître et utiliser les propriétés de la transposition

1. Soient $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Calculer ${}^t(AB)$, ${}^tA{}^tB$ et ${}^tB{}^tA$. Que remarquez-vous ?

2. Montrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice $B = A + {}^tA$ est symétrique.
3. Soit A une matrice symétrique. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice A^k est symétrique.

Exercice n°8 Savoir résoudre des équations matricielles

1. Soient $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Résoudre l'équation $A - 3X = 2B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Soit $A = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$. Résoudre l'équation $X^2 = A$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Soit $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice A . Commencez par traduire cela sous la forme d'une équation dont vous préciserez l'inconnue.

4. Soit $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Résoudre l'équation $AX = 3X$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

Exercice n°9 Représentation matricielle des systèmes linéaires

1. On considère 3 réels x, y, z et les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -4 & 5 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}$$

A quel système linéaire l'égalité matricielle $AX = B$ est-elle équivalente ?

2. On considère le système linéaire suivant :

$$(S) \begin{cases} 2x - y + 3z = -1 \\ -5x + y = 3 \\ x + y - z = 4 \end{cases}$$

A quelle égalité matricielle le système (S) est-il équivalent ?

Exercice n°10 Déterminer la puissance n -ième d'une matrice

Soit $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Calculer AM . Que peut-on en déduire quant à la multiplication à gauche de M par A ?

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{bmatrix}$.

Exercice n°11 Déterminer la puissance n -ième d'une matrice

Dans chacun des cas calculer A^2, A^3, A^4 puis conjecturer la forme de A^n pour $n \in \mathbb{N}$. Démontrer cette conjecture.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice n°12 Déterminer la puissance n -ième d'une matrice

On considère les matrices $A = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ et $B = A - 2I_3$.

- Calculer B, B^2 .
- Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = 2^n I_3 + n2^{n-1}B$.

Exercice n°13 Déterminer la puissance n -ième d'une matrice

On considère la matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

- Calculer $A^2 = 5A - 4I_3$.
- Calcul de A^n :
 - Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I_3$.
Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .
 - Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 4a_n$.
 - Déterminer a_n en fonction de n .
 - Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de A et I_3 .

Exercice n°14 Déterminer la puissance n -ième d'une matrice

On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$.

1. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel a_n tel que

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1 - 2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & a_n + 1 \end{bmatrix}$$

Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_{n+1} en fonction de a_n . Préciser a_0 .

- Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de n .
- En déduire A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice n°15 Etude d'un système de suites

On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par les premiers termes $u_0 \in \mathbb{R}$ et $v_0 \in \mathbb{R}$ et par les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 4u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n \end{cases}$$

- Déterminer la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}$.
- Montrer que $A = 3I_2 + J$ où J est une matrice à déterminer.
- Vérifier que $J^2 = 0_2$.
Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = 3^n I_2 + n3^{n-1}J$.
- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$.
- En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n, u_0, v_0 .