

TD n°7 - Systèmes linéaires

Exercice n°1 Premières résolutions de système linéaire

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$(S_1) \begin{cases} x + 3y = 4 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases} ; \quad (S_2) \begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ 5x + 7y = 1 \end{cases} ; \quad (S_3) \begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 3x + 6y = 15 \end{cases} ;$$

$$(S_4) \begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x + 2y - z = 1 \\ 3x + y + 2z = 3 \end{cases} ; \quad (S_5) \begin{cases} 3x - 2y - 2z = 0 \\ -2x + y + z = 1 \\ 4x + 3y - z = 2 \end{cases} ;$$

$$(S_6) \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ x + y + z = 3 \\ 3x + 2y - 4z = 1 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases} ; \quad (S_7) \begin{cases} u + w = 1 \\ v + w = 0 \\ u + v = 1 \\ 2u + 3v = 0 \end{cases} ; \quad (S_8) \begin{cases} x + 3y + 7z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} .$$

Exercice n°2 Résoudre des systèmes linéaires carrés

Résoudre :

$$(S_1) \begin{cases} x - y + z = 1 \\ -x - y + z = -1 \\ -x - y - z = 1 \end{cases} ; \quad (S_2) \begin{cases} x + 2y - z + 3t = 7 \\ 2x + 4y - 3z + 7t = 19 \\ x + 3y + 3z + t = -1 \\ x - y - 9z + 6t = 10 \end{cases}$$

Exercice n°3 Savoir repérer un SL échelonné et ses variables pivots

Pour chacun des systèmes linéaires suivants, dire s'il est échelonné ou pas.

Dans l'affirmative préciser les pivots et variables secondaires.

$$(S_1) \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2y + 2z = 1 \\ 2z = 1 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ z = -3 \\ y + 3z = -1 \end{cases}$$

$$(S_3) \begin{cases} 2x - z + 3t = -2 \\ x + 2z + t = 4 \\ y - 2z + t = 0 \end{cases} \quad (S_4) \begin{cases} 2x + y - z + 3t = 7 \\ z + 2t = 0 \end{cases}$$

$$(S_5) \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ 2y - z = -1 \\ y - z = 3 \end{cases} \quad (S_6) \begin{cases} 2x - z + 3t = 1 \\ y - z + 4t = 0 \end{cases}$$

Exercice n°4 Savoir résoudre un SL qui est sous forme échelonné

Pour chacun des systèmes échelonnés suivants, déterminer ses variables pivots et secondaires, puis le résoudre.

$$(S_1) \begin{cases} x + y + z = 5 \\ 2y + 2z = 1 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2z = 3 \end{cases}$$

$$(S_3) \begin{cases} x - y + z + 2t = 1 \\ y - 2z + t = 3 \\ 4z - t = 2 \end{cases} \quad (S_4) \quad x + y + z = 1$$

Exercice n°5 Savoir résoudre des SL homogènes

Déterminer l'ensemble des solutions du système linéaire suivant :

$$(S_1) \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} -2x - 2y - 6z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \quad (S_4) \begin{cases} 3x - y + z - t = 0 \\ x + 2y - z + t = 0 \\ -2x + 3y - 2z + 2t = 0 \\ 5x + 3y - z + t = 0 \end{cases}$$

Exercice n°6 Résoudre des systèmes linéaires avec paramètres dans le second membre

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$(S_1) \begin{cases} x + y + z = a \\ x - y - z = b \\ -3x + y + 3z = c \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} -2x - 3y + 3z = a \\ x + 2y - z = b \\ x + y - 2z = c \end{cases}$$

Exercice n°7 Résoudre des systèmes linéaires avec un paramètre dans les coefficients

Déterminer les valeurs de $k \in \mathbb{R}$ pour lesquelles les systèmes suivants sont de Cramer, puis les résoudre en distinguant les cas.

$$(S_1) \begin{cases} kx + y = 1 \\ x + ky = 1 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} x - 3z = -3 \\ 2x + ky - z = -2 \\ kx + y + kz = 1 \end{cases} \quad (S_3) \begin{cases} (1 - k)x - y + 2z = 0 \\ x - (1 + k)y + 2z = 0 \\ x - y + (2 - k)z = 0 \end{cases}$$