TD n°8 - Limite d'une suite

Exercice n°1 Savoir déterminer la limite d'une suite définie explicitement

Dans chacun des cas, déterminer (si elle existe) la limite de la suite (u_n) :

1) $u_n = \dfrac{6}{5n^2+3}$
2) $u_n = 4 + \left(-\dfrac{1}{5}\right)^n$
3) $u_n = \dfrac{3^n}{2^n}$
4) $u_n = \dfrac{1}{n+2015} + 7$
5) $u_n = \dfrac{-2n}{\sqrt{n}+5}$
6) $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{4}\right)^k$
7) $u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$
8) $u_n = n3^n - 3^{n+1}$
9) $u_n = n^5 - n^2 + 3$
10) $u_n = \dfrac{-2n^3+2n}{n^3+5}$
11) $u_n = \dfrac{\sqrt{9n^2+1}}{2n+4}$
12) $u_n = \dfrac{2^n}{7^n+1}$
13) $u_n = \sqrt{4n^2+n} - n$
14) $u_n = 4^n - 5^n$
15) $u_n = \ln(n) - n$
16) $u_n = \dfrac{5^n+2^n}{5^n-2^n}$
17) $u_n = e^n - n^{100} - (\ln n)^{1000}$
18) $u_n = 4^n - n^2\ln(n^3)$
19) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
20) $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$

Exercice n°2 Déterminer la limite de suites usuelles

On considère la suite définie par : $u_0 = 16$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n$.

1. (a) Exprimer u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Etudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa convergence.
2. On note S_n la somme des $n+1$ premiers termes de la suite (u_n) :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

   (a) Calculer S_4.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = 64(1 - 0,75^{n+1})$.
   (c) Vers quel réel tend S_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice n°3 Déterminer la limite d'une suite usuelle

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 2u_n - 1.$$

1. De quel type est la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. Exprimer u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Etudier le comportement asymptotique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice n°4 Savoir utiliser les théorèmes d'encadrement

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$

1. Etudier la monotonie de (u_n).
2. Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > n^2$.
3. En déduire le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice n°5 Savoir utiliser les théorèmes d'encadrement

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{n}e^{-u_n}$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $u_n > 0$.
2. Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n-1}$.
3. En déduire le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice n°6 Savoir utiliser le TLM

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,7$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$ avec $g : x \mapsto x^2$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $u_n \in]0;1[$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. En déduire le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice n°7 Utiliser le théorème d'encadrement pour l'étude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \sqrt{x+6}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 3$.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Que peut-on en déduire ?
4. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - 3 = \dfrac{u_n - 3}{3 + \sqrt{u_n+6}}$.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 3| \leq \dfrac{1}{3}|u_n - 3|$.
   (c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 3| \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$.
   (d) Conclure.

Exercice n°8 Utiliser le théorème d'encadrement pour étudier une suite définie par une somme

1. On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Montrer que, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $\dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{n}{n^2+k} \leq \dfrac{n}{n^2+1}$.
   (b) En déduire que : $\dfrac{n}{n+1} \leq u_n \leq \dfrac{n^2}{n^2+1}$.
   (c) Conclure quant au comportement asymptotique de la suite (u_n).
2. En réalisant une approche similaire à celle de la question précédente, montrer que la suite (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, par $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n^2+k}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice n°9 Utiliser le théorème d'encadrement pour étudier une suite définie par une somme

Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Etudier la monotonie de (H_n).
   Que peut-on en déduire concernant le comportement asymptotique de (H_n) ?
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\ln(1+x) \leq x$.
3. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $\ln(k+1) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$.
4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $\ln(n+1) \leq H_n$.
5. Conclure quant au comportement asymptotique de la suite (H_n).

Exercice n°10 Utiliser la monotonie pour étudier une suite définie par une somme

Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Etudier la monotonie de (u_n).
2. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $u_n \leq 2 - \dfrac{1}{n}$.
3. En déduire que (u_n) converge et donner un encadrement de sa limite.

Exercice n°11 Utiliser le théorème des suites adjacentes

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad ; \quad v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}$$

1. Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
2. Conclure.

Exercice n°12 Suite définie par récurrence

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$.

1. Dresser le tableau de variation de f sur $[0;1]$ (on admet que f est dérivable sur $[0;1]$).
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$.
3. Montrer que (u_n) est croissante.
4. Justifier que (u_n) converge vers un réel $\ell \in [0;1]$.
5. Montrer que $\ell^2 = \dfrac{1+\ell}{2}$.
6. Déterminer ℓ.

Exercice n°13 Suite définie par récurrence

On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2 - \dfrac{1}{u_n}$.

1. Dresser le tableau de variation, avec les limites, de la fonction $f : x \mapsto x + 2 - \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ (on admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$).
2. Etudier le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+^\star$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien définie et $u_n \geq 3$.
4. Etudier la monotonie de (u_n) par deux méthodes : en utilisant le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ et en utilisant le fait que f est croissante et un raisonnement par récurrence.
5. Etudier le comportement asymptotique de (u_n).

Exercice n°14 Suites extraites des indices pairs et impairs

On considère la suite (S_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}.$$

1. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geq 1}$ sont adjacentes.
2. Conclure quant au comportement asymptotique de (S_n).