

## TD n°8 - Matrices inversibles

### Exercice n°1 Savoir justifier que deux matrices sont inverses

1. Justifier que les matrices  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$  et  $B = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  sont inverses l'une de l'autre.

2. Soient  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$  et  $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

- (a) Calculer  $AB$ .
- (b) En déduire que  $A$  et  $B$  sont inversibles, puis préciser  $A^{-1}$  et  $B^{-1}$ .

### Exercice n°2 Justifier l'inversibilité et trouver l'inverse par polynôme annulateur

1. Soit  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ .

- (a) Calculer  $A^2$ . Déduire un polynôme annulateur de  $A$ .
- (b) En déduire que  $A$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$ .

2. Soit  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ .

- (a) Calculer  $A^2$ ,  $A^3$  puis calcule  $A^3 - A^2 - A$ . Déduire un polynôme annulateur de  $A$ .
- (b) En déduire que  $A$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$ .
- (c) En déduire que  $A^2$  est inversible et déterminer  $(A^2)^{-1}$ .

3. Soit  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $A = \begin{bmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{bmatrix}$ .

- (a) Montrer qu'il existe des réels  $x$  et  $y$  tels que  $A^2 = xA + yI_3$ .
- (b) En déduire que  $A$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$ .
- (c) Réinterpréter matriciellement le système suivant et le résoudre à l'aide de 3.(b)

$$(S) \begin{cases} 2y + 4z = 1 \\ \frac{1}{2}x + 2z = 0 \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y = 1 \end{cases}$$

### Exercice n°3 Justifier la non inversibilité d'une matrice

1. Soit  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

- (a) Montrer que  $A^3 - 3A^2 + 2A = 0_3$ .
- (b) En raisonnant par l'absurde, montrer que  $A$  n'est pas inversible.

2. Soient  $A$  et  $B$  deux matrices carrées d'ordre  $n$  **non nulles** telles que  $AB = 0_n$ . En raisonnant par l'absurde, montrer que  $A$  n'est pas inversible et  $B$  n'est pas inversible.

3. Soient  $A$  et  $B$  deux matrices carrées d'ordre 2 telles que  $AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Montrer qu'au moins l'une des deux matrices  $A$  et  $B$  n'est pas inversible.

4. Soient  $A$  et  $B$  deux matrices carrées d'ordre  $n$  telles que  $AB = 0_n$  et  $BA \neq 0_n$ .

- (a) Montrer que  $A$  et  $B$  sont des matrices non inversibles.
- (b) Calculer  $(BA)^2$

### Exercice n°4 Autour des matrices nilpotentes

Soit  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On suppose qu'il existe un entier  $p \geq 1$  tel que  $N^p = 0_n$ . Dans ce cas, on dit que la matrice  $N$  est nilpotente.

1. Soit la matrice  $A = \sum_{k=0}^{p-1} N^k$ . Calculer le produit  $A(I_n - N)$ .
2. En déduire que  $I_n - N$  est inversible et déterminer son inverse.

3. On pose  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- (a) Trouver la matrice  $N$  telle que  $A = I_3 - N$ .
- (b) Calculer  $N^k$  pour  $k = 2$  et  $k = 3$ .
- (c) En déduire que  $A$  est inversible et calculer  $A^{-1}$ .

**Exercice n°5 Savoir déterminer si une matrice est inversible et calculer l'inverse**

- Justifier que les matrices suivantes ne sont pas inversibles (avec un minimum de calculs) :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -12 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & -5 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -7 \end{bmatrix}$$

- Justifier que les matrices suivantes sont inversibles et déterminer les inverses associés

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

**Exercice n°6 Etudier une famille de matrices**

Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , on définit la matrice  $N(a) = \begin{bmatrix} 1-a & -a & 0 \\ -a & 1-a & 0 \\ -a & a & 1-2a \end{bmatrix}$ . On considère  $\mathcal{F}$  l'ensemble de toutes ces matrices :  $\mathcal{F} = \{N(a), a \in \mathbb{R}\}$ .

- Montrer que  $\mathcal{F}$  est stable par produit matriciel, i.e. pour tous  $a, b \in \mathbb{R}$ , il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $N(a) \times N(b) = N(c)$ . Exprimer le réel  $c$  en fonction de  $a$  et  $b$ .
- Déterminer les valeurs de  $a$  pour lesquelles  $N(a)$  est inversible et montrer que, dans ce cas,  $[N(a)]^{-1} \in \mathcal{F}$ .
- Soit  $C = N(1)$ . Expliciter  $C^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice n°7 Ma première diagonalisation**

On considère les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

L'objectif de cet exercice est d'obtenir une expression de  $A^n$  en fonction de  $n \in \mathbb{N}$ .

- Montrer que  $P$  est inversible et déterminer  $P^{-1}$ .
- Déterminer une matrice diagonale  $D$  telle que  $PD = AP$ .
- Montrer que  $A = PDP^{-1}$
- Montrer par récurrence, sur  $n \in \mathbb{N}$ , que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^n P^{-1}.$$

- Déterminer  $D^n$ . En déduire l'expression de  $A^n$ .

**Exercice n°8 Application de la diagonalisation à une système de suites**

On considère les suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par  $a_0 = b_0 = c_0 = \frac{1}{3}$  et les relations :

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + (1/2)b_n + (1/3)c_n \\ b_{n+1} = (1/2)b_n + (1/3)c_n \\ c_{n+1} = (1/3)c_n \end{cases}$$

On pose  $X_n = \begin{bmatrix} b_n \\ c_n \end{bmatrix}$ .

- Trouver une matrice  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_{n+1} = AX_n$ .
- Montrer par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_n = A^n X_0$ .
- Calcul de  $A^n$  :
  - On pose  $P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Calculer  $P^{-1}$ , puis  $D = P^{-1}AP$ .  
On doit trouver que  $D$  est une matrice diagonale.
  - Exprimer  $A$  en fonction de  $D$ ,  $P$  et  $P^{-1}$ .
  - Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Exprimer  $A^n$  en fonction de  $n$ ,  $D$ ,  $P$  et  $P^{-1}$ .
  - En déduire  $A^n$ .
- Déduire des questions précédentes l'expression de  $X_n$  puis de  $b_n$  et  $c_n$  en fonction de  $n$ .
- Montrer que  $a_n + b_n + c_n = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . EN déduire l'expression de  $a_n$  en fonction de  $n$ .