TD n°8 - Suites numériques

Exercice n°1 Etudier la monotonie d'une suite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite monotone, et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ la suite définie par $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est monotone.

Exercice n°2 Déterminer le terme général d'une suite définie par récurrence

Déterminer le terme général des suites suivantes :

1. La suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 - 2u_n$.
2. La suite (x_n) définie par $x_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = 3x_n - 1$.
3. La suite (y_n) définie par $y_0 = 1$, $y_1 = 9$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_{n+2} = y_{n+1} - \dfrac{y_n}{4}$.
4. La suite (z_n) définie par $z_0 = 0$, $z_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+2} = z_{n+1} - \dfrac{1}{2}z_n$.
5. La suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2^{n+1}v_n$.
6. La suite (w_n) définie par $w_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = \dfrac{-2}{n+1}w_n$.

Exercice n°3 Justifier l'existence d'une limite et la déterminer

On souhaite montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\dfrac{a^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On suppose que $a \in \mathbb{R}^\star$. On pose $u_n = \dfrac{|a|^n}{n!}$.

1. Montrer que la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers 0.
2. Montrer qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N, \quad u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}u_n$.
3. Justifier que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.
4. Montrer que $\ell = 0$.

Exercice n°4 Etudier des limites

Etudier les limites des suites (u_n) suivantes :

1. $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$.
2. $u_n = \dfrac{\sin(n^2)}{n}$.
3. $u_n = \dfrac{n^3+5n}{4n^3+\cos(n)+\frac{\ln(n)}{n^2}}$.
4. $u_n = n^{\sin(n)/n}$.
5. $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Exercice n°5 Etudier la convergence de suites par encadrement

Montrer que la suite (u_n) admet une limite et la calculer :

1. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$ 2. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$ 3. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n^2+k}$ 4. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$
5. $u_n = \left(\sin\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{5}\cos n\right)^n$.

Exercice n°6 Etudier la convergence de suites par encadrement

On admet que, pour tout $x \geq 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.

Exercice n°7 Etudier la convergence d'une suite classique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq 2 - \dfrac{1}{n}$.
2. Comparer, pour tout $k \geq 2$, $\dfrac{1}{k^2}$ et $\dfrac{1}{k(k-1)}$.
   En déduire, sans récurrence, une autre preuve de 1.
3. Etudier la convergence de (u_n).

Exercice n°8 Etudier des suites adjacentes

Montrer que les suites de termes généraux $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2(k+1)^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{3n^2}$ convergent vers une même limite.

Exercice n°9 Etudier la convergence d'une suite par des suites extraites

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = \sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor$.

1. Montrer que (u_n) est bornée.
2. (a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $(n+1)^2 \leq n^2+3n < (n+2)^2$.
   (b) Soit la suite de terme général $v_n = u_{n^2+3n}$.
   Montrer que, pour tout n, $v_n = \sqrt{n^2+3n} - n - 1$.
   (c) Montrer que (v_n) converge vers $\dfrac{1}{2}$.
3. Trouver une suite extraite de (u_n) constante.
4. Etudier le convergence de (u_n).

Exercice n°10 Etudier la convergence d'une suite par des suites extraites

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que les suites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent. Montrer que (u_n) converge.

Exercice n°11 Etudier des suites adjacentes

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
2. Que peut-on en déduire ?

Exercice n°12 Vrai ou faux

Soient deux suites réelles (u_n) et (v_n). Répondre par vrai ou faux et justifier votre réponse.

1. Le produit de deux suites majorées est majoré.
2. Si la suite (u_n) ne tend ni vers $+\infty$ ni vers $-\infty$ alors elle est bornée.
3. Si $(|u_n|)$ converge vers $L \in \mathbb{R}_+$ alors (u_n) converge vers L ou $-L$.
4. Si $(u_n + v_n)$ diverge alors (u_n) diverge ou (v_n) diverge.
5. Si (u_n) converge vers 0 alors $(u_n v_n)$ converge vers 0.
6. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent alors (u_n) converge.

Exercice n°13 Etudier une suite à valeurs complexes

Déterminer le terme général de la suite $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 \in \mathbb{C} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 3\overline{u_n}}{5}.$$

Quelle est la limite de (u_n) ?

Exercice n°14 Un résultat sur les suites à valeurs complexes

Soient (ρ_n) et (θ_n) deux suites réelles convergentes.
Etudier la convergence de la suite $(\rho_n e^{i\theta_n})$. Etudier la réciproque.

Exercice n°15 Etudier une autre suite à valeurs complexes

Soient (u_n) la suite définie par $u_0 = \rho e^{i\theta}$ (avec $\rho \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$), et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n + |u_n|}{2}$.

1. Déterminer le terme général u_n en fonction de ρ, θ et n (on utilisera un produit).
2. En vous aidant de l'exercice précédent, justifier la convergence de (u_n) (sans calculer la limite).
3. En utilisant la relation $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, simplifier le résultat obtenu à la question 1.
4. Montrer que $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. En déduire la limite de (u_n).

Exercice n°16 Déterminer des intervalles de stabilité

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 3$.

1. Etudier ses points fixes et ses variations. Trouver les antécédents de 2 par f.
2. Etudier la stabilité des intervalles : $\left]-\infty; \frac{2}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right]$, $\left[\frac{4}{3}; 2\right]$, $\left[\frac{2}{3}; 2\right]$, $[2; +\infty[$.
3. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{3}{4}u_n^2 - 2u_n + 3$.
   Dire, suivant la valeur de $u_0 \in \mathbb{R}$, si $(u_n)_{n\geq 0}$ est : bien définie, minorée, majorée, bornée. Le cas échéant préciser des bornes de $(u_n)_{n\geq 0}$.

Exercice n°17 Etudier graphiquement le comportement d'une suite récurrente

Tracer les schémas en escaliers ou spirales associés aux suites récurrentes (u_n) lorsque $u_0 = \frac{1}{2}$:

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n$; 2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$; 3. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 3$.

Exercice n°18 Etude guidée d'une suite récurrente

On considère (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

1. Déterminer les variations et point(s) fixe(s) de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2+x}$, définie sur $\mathbb{R}$.
2. Réaliser le schéma en escalier associé à cette suite et conjecturer le comportement de (u_n).
3. Etudier les intervalles de stabilité de f. En déduire que (u_n) est bien définie et minorée.
4. Prouver par récurrence que (u_n) est décroissante. En déduire que (u_n) est convergente.
5. Quel est la limite de (u_n) ? Justifier **soigneusement**.
6. Que se passe-t-il dans le cas où $u_0 = -2$?

Exercice n°19 Etude guidée d'une seconde suite récurrente

On considère (u_n) la suite définie par $u_0 = -\frac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + 4u_n + 2$.

1. Déterminer les variations de la fonction $f : x \mapsto x^2 + 4x + 2$, définie sur $\mathbb{R}$.
2. Réaliser le schéma en escalier associé à cette suite et conjecturer le comportement de (u_n).
3. Etudier le signe de la fonction $x \mapsto f(x) - x$.
   En déduire les éventuels points fixes de f. Compléter le tableau de variation.
4. Etudier les intervalles de stabilité de f. En déduire que (u_n) est bien définie et minorée.
5. Prouver que (u_n) est croissante. En déduire que (u_n) possède une limite.
6. En raisonnant par l'absurde, montrer que (u_n) diverge avec pour limite $+\infty$.
   Rédiger **soigneusement**.
7. On suppose dans cette question que $u_0 \in \mathbb{R}$.
   Discuter, en fonction de la valeur de u_0, de la nature de (u_n) et de son éventuelle limite.

Exercice n°20 Etude guidée d'une troisième suite récurrente

On considère (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{u_n}$.

1. Déterminer les variations et point(s) fixe(s) de la fonction $f : x \mapsto 1 + \dfrac{2}{x}$, définie sur $]0; +\infty[$.
2. Réaliser le schéma en escalier associé à cette suite et conjecturer le comportement de (u_n).
3. Etudier les intervalles de stabilité de f. En déduire que (u_n) est bien définie.
4. Etude de la fonction $f \circ f$.
   (a) Montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont des suites récurrentes associées à la fonction $f \circ f$.
   (b) Donner, sans calcul, les variations de la fonction $f \circ f$ sur un intervalle adhoc. Déterminer le(s) point(s) fixe(s) de $f \circ f$.
   (c) Déduire que (u_{2n}) est majorée et (u_{2n+1}) minorée.
5. Prouver que (u_{2n}) est croissante. En déduire que (u_{2n}) converge. Vous préciserez la limite.
6. Prouver que (u_{2n+1}) est décroissante. En déduire que (u_{2n+1}) converge. Vous préciserez la limite.
7. En déduire que (u_n) est convergente vers une limite à préciser. Justifier.