

TD n°9 - Ensembles et événements

Exercice n°1 Manipuler différentes écritures d'ensembles

1. Enumérer les éléments de l'ensemble F dans chacun des cas suivants :

- (a) $F = \{3k - 7 \mid k \in \llbracket 1; 4 \rrbracket\}$.
- (b) $F = \{x \in E \mid -4, 5 < x \leq 15\}$ où $E = \{9; -5; 6; -20; -42; 0, 5; 1; -4\}$.
- (c) $F = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \llbracket 2; 4 \rrbracket, n = 2k + 1\}$.

2. Soit $E = \{-35; -30; -25; -20; -15; -10; -5; 0; 5; 10; 15; 20; 25; 30\}$.

Ecrire l'ensemble E sans énumérer ses éléments.

Exercice n°2 Utiliser les opérations ensemblistes

Dans chacun des cas suivants A et B sont des parties de E . Déterminer explicitement les ensembles : $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A \cap B}$, $\overline{A \cup B}$.

- 1. $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1; 2\}$, $B = \{2; 4\}$
- 2. $E = \mathbb{R}$, $A =]-\infty; 3]$, $B = [2; +\infty[$
- 3. $E = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{N}$, $B =]0; +\infty[$

Exercice n°3 Etudier les propriétés d'un ensemble de matrices

On considère $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

- 1. Calculer A^2 , A^3 .
- 2. En déduire que A n'est pas inversible.
- 3. On note $E = \{M(a) = I_3 + 2aA + 2a^2A^2 \mid a \in \mathbb{R}\}$.
 - (a) Soient $M_1, M_2 \in E$, montrer que $M_1M_2 \in E$.
 - (b) Soit $M \in E$. En déduire que M est inversible et préciser son inverse.

Exercice n°4 Maîtriser les relations d'appartenance, d'inclusion, d'égalité

On note $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $E = \{\alpha u + \beta v + \gamma w \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$.

- 1. Montrer que $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in E$?
- 2. Montrer que $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ par double inclusion.

Exercice n°5 Etudier des inclusions et égalités ensemblistes (EML 2004 ECE)

On considère $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $E_1(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = M\}$ et $E_2(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid A^2M = AM\}$.

Partie I

- 1. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M_1, M_2 \in E_1(A)$. Montrer que $\lambda M_1 + M_2 \in E_1(A)$.
- 2. (a) Etablir : $E_1(A) \subset E_2(A)$.
(b) Montrer que, si A est inversible, alors $E_1(A) = E_2(A)$.
- 3. (a) Etablir que, si $A - I_3$ est inversible, alors $E_1(A) = \{0_3\}$.

- (b) Un exemple : Soit $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Déterminer $E_1(A)$ et $E_2(A)$.

Partie II

On considère les matrices $C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ et $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- 1. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1} .
- 2. Déterminer une matrice diagonale D telle que $CP = PD$.
En déduire que $C = PDP^{-1}$.
- 3. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}M$.
Montrer : $M \in E_1(C) \iff N \in E_1(D)$.
- 4. Montrer que $N \in E_1(D)$ si et seulement s'il existe trois réels a, b et c tels que $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
- 5. En déduire l'expression générale des matrices de $E_1(C)$.
- 6. Donner l'expression générale des matrices de $E_2(C)$. Est-ce que $E_1(C) = E_2(C)$?

Exercice n°6 Déterminer une intersection entre deux ensembles

Sujet Ericome 2022 ECE.

Exercice n°7 Justifier une réunion entre deux ensembles

On note D l'ensemble des suites arithmétiques, $E = \{(a\lambda^n + b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ et F l'ensemble des suites arithmético-géométriques. Montrer par double inclusion que $F = D \cup E$.

Exercice n°8 Préciser les éléments d'un univers, d'un événement

On lance deux dés l'un après l'autre : on note le résultat du premier dé, puis on note le résultat du second dé.

1. Quel est l'univers noté Ω de cette expérience ?
2. Ecrire sous forme d'ensemble l'événement C : "on obtient le même numéro aux deux lancers".
3. Ecrire sous forme d'ensemble l'événement D : "La somme des dés vaut 4".
4. Ecrire sous forme d'ensemble l'événement E : "La somme des dés est supérieur ou égal 13".
5. Ecrire sous forme d'ensemble l'événement F : "Le produit des dés est supérieur ou égal à 15".
6. Ecrire sous forme d'ensemble l'événement G : "Le produit des dés est égal à 6".

Exercice n°9 Ecrire des événements à l'aide d'unions et d'intersections

On considère une urne contenant des boules blanches et des boules rouges. On tire successivement, avec remise, n boules de cette urne, $n \in \mathbb{N}, n \geq 5$.

Pour $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, on note :

B_k l'événement : "on a tiré une boule blanche lors du k -ème tirage" et

R_k l'événement : "on a tiré une boule rouge lors du k -ème tirage".

1. Décrire à l'aide des événements B_k et R_k , $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, les événements suivants :
 - (a) A : "on a obtenu deux boules blanches lors des deux premiers tirages"
 - (b) B : "on a obtenu deux boules blanches lors des trois premiers tirages"
 - (c) C : "on a obtenu au moins deux boules blanches lors des trois premiers tirages"
 - (d) D : "on a obtenu au plus deux boules blanches lors des trois premiers tirages"
 - (e) E : "on a obtenu un tirage unicolore"
 - (f) F : "on a obtenu une boule blanche lors des cinq premiers tirages"
 - (g) G : "on a obtenu au moins une boule blanche"
 - (h) G : "on a obtenu uniquement des boules rouges"
 - (i) H : "on a obtenu une boule blanche"
2. Parmi les événements définis ci-dessus, donner au moins deux exemples de couples d'événements incompatibles.
3. Parmi les événements définis ci-dessus, donner au moins trois exemples où un "événement est inclus dans un autre".
4. Proposer un système complet d'événements associé à cette expérience.

Exercice n°10 Ecrire des événements à l'aide d'unions et d'intersections

On effectue une succession de lancers avec une pièce de monnaie.

Pour tout $i \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, on note :

- P_i l'événement : "Obtenir Pile au i -ième lancer";
- F_i l'événement : "Obtenir Face au i -ième lancer";

On note X le nombre de Face obtenus avant l'obtention du deuxième Pile.

1. Ecrire les événements A_0 : " X vaut 0", A_1 : " X vaut 1" et A_2 : " X vaut 2" à l'aide des événements P_i et F_i .
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On cherche à faire de même pour l'événement A_n : " X vaut n ".
 - (a) Si A_n s'est réalisé, combien de fois a-t-on lancé la pièce ?
 - (b) Quel est le résultat du dernier lancer ?
 - (c) Combien de positions sont possibles pour le rang d'apparition du premier pile ?
 - (d) Ecrire A_n à l'aide des événements P_i et F_i .

Exercice n°11 Ecrire des événements à l'aide d'unions et d'intersections

Une urne contient 8 boules rouges, 4 boules noires et 2 boules vertes. Martin effectue dans cette urne des tirages d'une boule, avec remise de la boule tirée avant le tirage suivant.

Il continue d'effectuer ces tirages jusqu'à ce qu'il obtienne soit une boule rouge, auquel cas il a gagné, soit une boule verte, auquel cas il a perdu.

Le jeu continue donc quand il tire une boule noire.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note :

V_k l'événement : "on a tiré une boule verte lors du k -ème tirage" et

R_k l'événement : "on a tiré une boule rouge lors du k -ème tirage" et

N_k l'événement : "on a tiré une boule noire lors du k -ème tirage"

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

A_n : "Martin est déclaré gagnant à l'issue du n ème tirage"

B_n : "Martin continue le jeu à l'issue du n ème tirage".

On note également A : "Martin gagne le jeu" B : "Martin perd le jeu" et D : "Martin gagne le jeu à un tirage pair".

1. Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Décrire à l'aide des événements N_k , R_k et V_k , $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, les événements A_n et B_n .
2. Exprimer A en fonction des A_n , $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.
3. Exprimer D en fonction des A_n , $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.
4. Définir l'événement C de telle sorte que les événements A , B et C forment un système complet d'événements.
5. Exprimer C en fonction des B_n , $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.