TD n°9 - Matrices

Exercice n°1 Savoir écrire une matrice

Ecrire les matrices suivantes :

$$A=(i+j)_{\substack{1\leq i\leq 2\\ 1\leq j\leq 3}}\quad B=(ij)_{\substack{1\leq i\leq 3\\ 1\leq j\leq 2}}\quad C=\left((-1)^{i+j}\right)_{\substack{1\leq i\leq 3\\ 1\leq j\leq 3}}\quad D=(\max(i,j))_{\substack{1\leq i\leq 5\\ 1\leq j\leq 4}}$$

Exercice n°2 Savoir utiliser les opérations matricielles

Calculer, lorsque cela est possible, $A+B$, $2A-3B$, AB, BA et ${}^tB$ dans les cas suivants :

1. $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ et $B=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}$.
2. $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ et $B=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 1 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}$.
3. $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\end{bmatrix}$ et $B=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ -1\end{bmatrix}$.

Exercice n°3 Savoir utiliser les opérations matricielles

On considère la matrice : $M=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$.

Déterminer les matrices : $M-2I_3$, $-(M-2I_3)$ et $4(I_3-M)$.

Exercice n°4 Savoir réaliser des produits de matrices

Calculer les produits de matrices suivants :

$$\begin{bmatrix}-2 & 3 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2 & -1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-2 & 0\\ -1 & 1\\ 1 & -2\\ -1 & -3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-1 & 3\\ -2 & 4\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -8\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}3\\ 5\\ 7\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2 & 5 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-3\\ 1\\ 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-2 & 3 & -1\end{bmatrix}$$

Exercice n°5 Identités algébriques remarquables

On considère les matrices : $A=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ et $B=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$.

1. Calculer et comparer $A^2+2AB+B^2$ et $(A+B)^2$.
2. Calculer et comparer A^2-B^2, $(A+B)(A-B)$ et $(A-B)(A+B)$.

Exercice n°6 Manipulations les opérations dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Soient $A,B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Développer et simplifier les expressions suivantes :

1. $S=(3A)(2B)-(A+2B)^2+(A-B)\times(A+B)$.
2. $T=(A+B)(2A^2-2B)-2A^2(A+B)+(-A+B)^2$.

Exercice n°7 Connaître et utiliser les propriété de la transposition

1. Soient $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ et $B=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 0 & 4\end{bmatrix}$.

   Calculer ${}^t(AB)$, ${}^tA{}^tB$ et ${}^tB{}^tA$. Que remarquez-vous ?
2. Montrer que, pour toute matrice $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice $B=A+{}^tA$ est symétrique.
3. Soit A une matrice symétrique. Montrer que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, la matrice A^k est symétrique.

Exercice n°8 Savoir résoudre des équations matricielles

1. Soient $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}$ et $B=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 0 & 4\end{bmatrix}$.

   Résoudre l'équation $A-3X=2B$ d'inconnue $X\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Soient $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}$ et $B=\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}$.

   Résoudre l'équation $AX=B$ d'inconnue $X\in\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
3. Soit $A=\begin{bmatrix}-5 & -6\\ 4 & -5\end{bmatrix}$. Résoudre l'équation $X^2=A$ d'inconnue $X\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
4. Soit $A=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$.

   Déterminer toutes les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice A. Commencez par traduire cela sous la forme d'une équation dont vous préciserez l'inconnue.

Exercice n°9 Représentation matricielle des systèmes linéaires

1. On considère 3 réels x, y, z et les matrices
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -4 & 5 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}$$
A quel système linéaire l'égalité matricielle $AX = B$ est-elle équivalente ?
2. On considère le système linéaire suivant :
$$(S) \begin{cases} 2x - y + 3z = -1 \\ -5x + y = 3 \\ x + y - z = 4 \end{cases}$$
A quelle égalité matricielle le système (S) est-il équivalent ?

Exercice n°10 Savoir résoudre des équations matricielles

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

1. $AX = B$ avec $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 7 \\ -9 \\ 0 \end{bmatrix}$.
2. $AX = B$ avec $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.
3. $AX = 3X$ avec $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Exercice n°11 Déterminer la puissance n-ième d'une matrice

Soit $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

1. Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Calculer AM. Que peut-on en déduire quant à la mulitplication à gauche de M par A ?
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{bmatrix}$.

Exercice n°12 Déterminer la puissance n-ième d'une matrice

Dans chacun des cas calculer A^2, A^3, A^4 puis conjecturer la forme de A^n pour $n \in \mathbb{N}$. Démontrer cette conjecture.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice n°13 Déterminer la puissance n-ième d'une matrice On considère les matrices $A = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ et $B = A - 2I_3$.

1. Calculer B, B^2.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = 2^n I_3 + n2^{n-1}B$.

Exercice n°14 Déterminer la puissance n-ième d'une matrice

On considère la matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

1. Calculer $A^2 = 5A - 4I_3$.
2. Calcul de A^n :
   (a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I_3$.
   Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
   (b) Justifier l'unicité de a_n et b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Donner les valeurs de a_0, a_1, b_0, b_1.
   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 4a_n$.
   (d) Déterminer a_n en fonction de n.
   (e) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de A et I_3.

Exercice n°15 Déterminer la puissance n-ième d'une matrice

On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$.

1. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel a_n tel que
$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1 - 2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & a_n + 1 \end{bmatrix}$$
Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_{n+1} en fonction de a_n. Préciser a_0.
2. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n en fonction de n.
3. En déduire A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice n°16 Etude d'un système de suites

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les premiers termes $u_0 \in \mathbb{R}$ et $v_0 \in \mathbb{R}$ et par les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 4u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n \end{cases}$$

1. Déterminer la matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}.$$
2. Montrer que $A = 3I_2 + J$ où J est une matrice à déterminer.
3. Vérifier que $J^2 = 0_2$.
Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = 3^n I_2 + n3^{n-1} J$.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$.
5. En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n, u_0, v_0.