TD n°9 - Techniques de calcul d'intégrales

Exercice n°1 Utiliser l'intégration par parties

1. Calculer, à l'aide d'une IPP, les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\pi} x\sin(3x)\,\mathrm{d}x, \quad J = \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x, \quad K = \int_{-1}^0 x^3 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

2. A l'aide d'une IPP, déterminer une primitive de :

   a) arctan b) $f_n : x \mapsto x^n \ln x$ (où $n \in \mathbb{N}$ est fixé).

3. A l'aide d'une double IPP, calculer $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice n°2 Etudier une suite définie par une intégrale

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\displaystyle I_n = \int_1^e x^2(\ln x)^n\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq I_0$.
2. Etudier la convergence de la suite (I_n).
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\frac{I_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{e^3}{n+1} - I_n\right)$.
4. En déduire la limite de (I_n), puis celle de (nI_n).

Exercice n°3 Etudier une autre suite définie par une intégrale

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\displaystyle J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer J_0, J_1, J_2.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle J_{n+2} + J_n = \frac{1}{n+1}$. En déduire la valeur de J_3.
3. Prouver que la suite (J_n) converge et déterminer sa limite.
4. Déterminer une expression de J_{2n} et de J_{2n+1} en fonction de $n \in \mathbb{N}$ faisant intervenir une somme.

Exercice n°4 Utiliser l'IPP et les propriétés de l'intégrale pour montrer un lemme classique

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f \in \mathscr{C}^1([a;b], \mathbb{R})$. On admet que f' est bornée sur $[a;b]$.
L'objectif de cet exercice est de montrer la relation suivante, appelée *Lemme de Riemann-Lebesgue* :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = 0.$$

1. Traduire, en terme de quantificateurs, le fait que f' est bornée sur $[a;b]$.
2. Montrer que la suite d'intégrale $\displaystyle\left(\int_a^b f'(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right)_{n\geq 0}$ est bornée.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. A l'aide d'une IPP, réécrire $\displaystyle\int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$.
4. Prouver le résultat annoncé.

Exercice n°5 Effectuer un changement de variable affine

1. On veut calculer $\displaystyle I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$.

   (a) Effectuer le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - x$. En déduire que $\displaystyle I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t$.

   (b) Effectuer le changement de variable $u = \frac{t}{2}$. En déduire la valeur de I.

2. Déterminer une primitive de $\displaystyle f : x \mapsto \frac{1}{1+\sin x}$.

Exercice n°6 Effectuer un changement de variable de manière guidé

1. A l'aide du changement de variable $t = e^x$, calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$.
2. A l'aide d'une changement de variable trigonométrique, calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_0^{1/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

3. A l'aide du changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$,
   déterminer une primitive de $\displaystyle f : x \mapsto \frac{1}{\sin x - 1}$ définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice n°7 Calculer des intégrales sans être guidé

Etudier l'existence des intégrales suivantes puis les calculer :

$$A = \int_1^e (\ln x)^2\,\mathrm{d}x \quad ; \quad B = \int_{-1/2}^{1/2} x\arcsin x\,\mathrm{d}x \quad ; \quad C = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t^2+2t+1}\,\mathrm{d}t \quad ;$$

$$D(t) = \int \frac{1}{e^t - e^{-t}}\,\mathrm{d}t \quad ; \quad M(x) = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x - 2\cos x + 2}\,\mathrm{d}x.$$