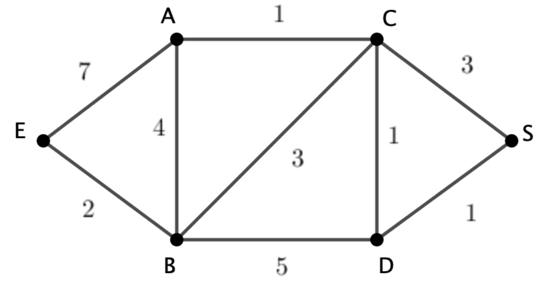
TP - Algorithme de Dijkstra

1 Notion de graphe pondéré

Définitions :

1. On dit qu'un graphe est pondéré si chaque arête est pondérée par un réel strictement positif appelé poids de l'arête (un tel graphe peut être orienté ou non).
2. Dans un graphe pondéré, le poids d'une chaîne (un chemin) est la somme des poids des arêtes (des arcs) qui la composent.
3. Un plus court chemin entre deux sommets dans un graphe pondéré est une chaîne (un chemin) de poids minimale entre ces deux sommets (un tel parcours existera nécessairement si le graphe pondéré est connexe mais ne sera peut être pas unique).

Exemple de graphe pondéré



L'arête $B-D$ à pour poids 5 ;
La chaîne $B-C-A-B-E$ à pour poids $3+1+4+2=10$.

2 Algorithme de Dijkstra

L'objectif de cet algorithme est de déterminer, dans un graphe pondéré, un plus court chemin entre un sommet de départ et tous les autres sommets.

On va chercher une chaîne de poids minimal entre les sommets E (sommet de départ) et S de l'exemple précédent.
L'algorithme de Dijkstra se construit de ligne en ligne à partir d'un tableau ayant sur la première ligne les sommets du graphe. On construit les lignes suivantes en observant le graphe et en remplissant le tableau au fur et à mesure en suivant les étapes écrites ci-dessous :

- **Etape n°1 :**

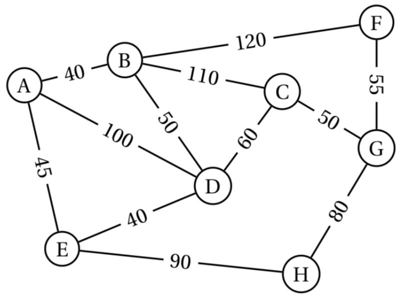
  Sur la seconde ligne du tableau, écrire le coefficient 0 sous le sommet de départ et ∞ sous les autres sommets.
- **Etape n°2 :**

  Tant qu'il y a des sommets non sélectionnés :
  1. Sur la dernière ligne écrite, repérer et sélectionner le sommet X de coefficient minimal
  2. Rayer toutes les cases vides en dessous de X
  3. Pour chaque sommet Y adjacent à X :
     (a) calculer la somme $\sum$ du coefficient de X et du poids de l'arête reliant X à Y ;
     (b) si $\sum$ est strictement inférieur au coefficient actuel de Y, inscrire $\sum$ dans la case correspondante de la colonne Y en indiquant en indice le sommet de provenance ;
     (c) sinon, reporter l'ancien coefficient de Y et sa provenance.
  4. Pour les sommets non adjacents à X, reporter les coefficients de la ligne précédente.
- **Etape n°3 :**
  1. Le poids minimal entre le sommet de départ et chacun des sommets est le dernier coefficient de chaque colonne.
  2. Les sommets inscrits en indice permettent, par remontée, de déterminer un plus court chemin entre le sommet de départ et un autre sommet du graphe.

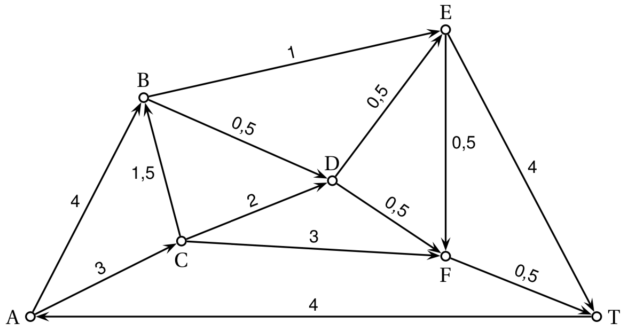
E	A	B	C	D	S

Exercice n°1 Application de l'algorithme de Dijkstra (graphe pondéré non orienté)

Les arêtes sont maintenant pondérées par le coût de chaque vol, exprimé en euros.
Un voyageur partant de l'aéroport A doit se rendre à l'aéroport G.
En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminer le trajet le moins cher.



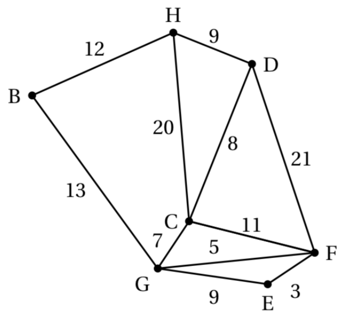
Exercice n°2 Application de l'algorithme de Dijkstra (graphe pondéré orienté)



Déterminer le plus chemin entre les sommets A et T.

Exercice n°3 Exercice d'entrainement n°1

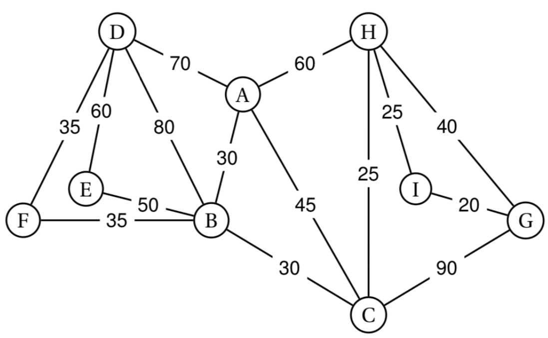
Des touristes sont logés dans un hôtel H.
Un guide souhaite faire visiter la région à ces touristes en empruntant les routes signalées comme d'intérêt touristique par l'office du tourisme.
Les tronçons de route qu'il souhaite emprunter sont représentés sur le graphe ci-contre.
Le long de chaque arête figure la distance en kilomètres des différents tronçons.



1. (a) Le guide peut-il emprunter tous les tronçons de route en passant une et une seule fois sur chacun d'eux, en partant de l'hôtel et en y revenant ? Justifier la réponse.
   (b) Le guide peut-il emprunter tous les tronçons de route en passant une et une seule fois sur chacun d'eux, en partant de l'hôtel mais sans forcément y revenir ? Justifier la réponse.
2. Un musée est situé en E. Déterminer le plus court chemin menant de l'hôtel H au musée E. Justifier la réponse.

Exercice n°4 Exercice d'entrainement n°2

Sur les arêtes du graphe $\mathscr{G}$ sont indiqués les temps de parcours exprimés en seconde entre deux endroits du lycée.



Déterminer, à l'aide de l'algorithme de Dijkstra, le chemin permettant de relier le sommet G au sommet D en un temps minimal.
Déterminer ce temps minimal, exprimé en seconde.

