

# TP - Une méthode pour calculer les puissances d'une matrice

## A l'aide de la formule du binôme de Newton matricielle

### Théorème (Formule du binôme de Newton matricielle)

Soit  $p \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ . Soient  $A, B$  deux matrices carrées d'ordre  $p$  **qui commutent**, ie  $AB = BA$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Alors

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k A^{n-k}.$$

### Compléments de cours

- **Déf. (Matrice nilpotente)**

Soit  $p \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ . Une matrice  $N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  est dite **nilpotente** lorsqu'il existe  $r \in \mathbb{N}$  tel que  $N^r = 0_p$ . Le plus petit entier  $k$  tel que  $N^k = 0_p$  est appelé **l'indice de nilpotence** de  $N$ .

Autrement dit, une matrice est nilpotente lorsque toutes ses puissances sont nulles à partir d'un certain rang.

- **Th. (Centre de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ ) :**

Les seules matrices de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  qui commutent avec **toutes les autres** matrices de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  sont les matrices scalaires, c'est-à-dire du type  $\lambda I_p$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Objectif :** On cherche à calculer les puissances d'une matrice carrée  $A$  d'ordre  $p \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ .

### Méthode :

- Décomposer  $A$  sous la forme  $A = \lambda I_p + N$ , où  $\lambda \in \mathbb{R}$  est une matrice scalaire et  $N$  une matrice nilpotente d'indice  $r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ , préciser les valeurs des puissances de  $N$  ;
- Préciser que les matrices  $\lambda I_p$  et  $N$  commutent ;
- Appliquer la formule du binôme à l'expression  $(\lambda I_p + N)^n$ . En déduire  $A^n$  pour  $n \geq r - 1$ , puis pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exemple de cours :** Calculer les puissances de la matrice  $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  en remarquant que  $A = 3I_3 + N$

où  $N = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ .

**Exercice n°1 :** On cherche à déterminer les puissances de la matrice  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ .

1. Justifier que  $A = 2I_3 + N$  où  $N$  est une matrice à préciser. Montrer que  $N$  est nilpotente d'indice 3.
2. En appliquant la formule du binôme de Newton pour  $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$ , exprimer  $A^n$  en fonction de  $n$ ,  $I_3$  et  $N$ .
3. Vérifier que la formule trouvée est valable pour tout  $n \in \mathbb{N}$  (vérifier les cas  $n = 0$  et  $n = 1$ ).

**Exercice n°2 :** Soit  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , déterminer  $B^n$ .

**Exercice n°3 (Cas non nilpotent)** Soit  $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , déterminer  $C^n$ .

*Indication : on commencera par déterminer les puissances de  $J = I_3 + C$  par conjecture - récurrence. Puis remarquer que  $C = -I_3 + J$ .*