TP - Une méthode pour calculer les puissances d'une matrice

A l'aide de la formule du binôme de Newton matricielle

Théorème (Formule du binôme de Newton matricielle)
Soit $p \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Soient A, B deux matrices carrées d'ordre p **qui commutent**, ie $AB = BA$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k A^{n-k}.$$

Compléments de cours

- **Déf. (Matrice nilpotente)**

  Soit $p \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Une matrice $N \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ est dite **nilpotente** lorsqu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $N^r = 0_p$. Le plus petit entier k tel que $N^k = 0_p$ est appelé **l'indice de nilpotence** de N.
  Autrement dit, une matrice est nilpotente lorsque toutes ses puissances sont nulles à partir d'un certain rang.

- **Prop. :**

  Les seules matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ qui commutent avec **toutes les autres** matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ sont les matrices scalaires, c'est-à-dire du type λI_p avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Objectif : $\boxed{\text{On cherche à calculer les puissances d'une matrice carrée } A \text{ d'ordre } p \in \mathbb{N}^{\geq 1}}$.

Méthode :

- Décomposer A sous la forme $A = \lambda I_p + N$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et N un matrice nilpotente d'indice $r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Préciser que la matrice scalaire λI_p et la matrice N commutent. Préciser les valeurs des puissances de N.

- Appliquer la formule du binôme à l'expression $(\lambda I_p + N)^n$. En déduire A^n pour $n \geq r-1$, puis pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice n°1 : On cherche à déterminer les puissances de la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

1. Justifier que $A = 2I_3 + N$ où N est une matrice à préciser. Montrer que N est nilpotente d'indice 3.
2. En appliquant la formule du binôme de Newton, exprimer A^2, A^3, A^4 en fonction de I_3 et N. De même, pour $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, exprimer A^n en fonction de n, I_3 et N.
3. Vérifier que la formule trouvée est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$ (vérifier les cas $n = 0$ et $n = 1$).

Exercice n°2 : Soit $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer B^n.

Exercice n°3 : Soit $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer C^n.
Indication : on commencera par déterminer les puissances de $J = I_3 + C$ par conjecture - récurrence. Puis remarquer que $C = -I_3 + J$.