

TP Calculs de limites

Sans forme indéterminée

Exercice n°1 Limites des fonctions usuelles, à connaître !

Déterminer les limites suivantes. Pour les limites nulles vous préciserez, lorsque c'est possible, si c'est 0^+ ou 0^- .

$$\begin{array}{cccccc} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{101} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} & \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^4} & \lim_{x \rightarrow 9} \sqrt{x} & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) & \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{77} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^5} & \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^6} & \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^7} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^9} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^8} & \lim_{x \rightarrow 2} x^4 & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} & \lim_{x \rightarrow -\infty} x^8 & \lim_{x \rightarrow 0} \exp(x) & \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} & \lim_{x \rightarrow e} \ln(x) & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \end{array}$$

Exercice n°2 Des limites, mais sans indéterminations

Calculer les limites suivantes, et préciser si la courbe représentative \mathcal{C}_f de f admet une asymptote horizontale ou verticale.

$$\begin{array}{cccccc} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 2x - 3 & \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 6x^2 + 1 & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x+1)^2} & \lim_{x \rightarrow +\infty} -\sqrt{x} + \frac{1}{x} & \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x+3)^5 & \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x+3)^5 & \lim_{x \rightarrow +\infty} (4-2x)^2 & \lim_{x \rightarrow -\infty} -5\sqrt{x^2-1} & \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 3x + 1 & \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-3}{\sqrt{2-x}} & \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-3}{x-1} & \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-3}{x-1} & \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{5}{4-x^2} & \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{5}{4-x^2} & & \end{array}$$

Forme indéterminée

Les principales formes indéterminées sont

$\infty - \infty$	$0 \times \infty$	$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$
-------------------	-------------------	---------------	-------------------------

Rem. : $\frac{0}{\infty}$, $\frac{\infty}{0}$ et $\infty \times \infty$ ne sont pas des formes indéterminées.

Exercice n°3 Le cas des polynômes et fractions rationnelles

Exemple de cours : Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^4 - 2x + 1}{-3x + 2 + 2x^5}$.

Calculer les limites suivantes et préciser lorsque la courbe représentative \mathcal{C}_f de f admet une asymptote horizontale.

$$\begin{array}{cccc} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 2x + 3 & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+3}{2x-1} & \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 + x & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-2}{2x+3} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4-2x^4}{x^2(x+1)^2} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-5}{x+x^2} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x+1)^2}{(2x-3)^3} & \end{array}$$

Th. (Croissances comparées)

Soient $a, b > 0$.

- \ln est **négligeable** en $+\infty$ devant les fonctions puissances :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^b}{x^a} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{(\ln x)^b} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a |\ln x|^b = 0.$$

- \exp est **prépondérante** en $\pm\infty$ devant les fonctions puissances :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{bx}}{x^a} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{e^{bx}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^a e^{bx} = 0.$$

Exercice n°4 Utiliser les croissances comparées pour lever une forme indéterminée

Exemple de cours : Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - \ln(x)}{x^2 + e^x}$.

Déterminer les limites suivantes. Commencer par déterminer si la limite proposée est indéterminée ou non.

$$\begin{array}{cccccc} \lim_{x \rightarrow +\infty} x - e^x & \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x}}{x^2} & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} & \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} & \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + x^2 + 1 & \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x^2 + 1 & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - x^2}{e^{2x} + x^2} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(x) - \sqrt{x}} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) - x^2 + 2x + 1 & \lim_{x \rightarrow 0} x^5 - x^4 \ln(x) & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^{2x}}{x^6 \ln(x)} \end{array}$$

Exercice n°5 Un peu de tout...

Donner, si elles existent, les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+2}{\ln(x)}$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{\ln(x)}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}e^x}{x+1}$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{x}e^{-x}$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$
6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+3) - \ln(3)}{x}$
7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x} + 2x + 7}{e^x + e^{-x}}$
8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 + 2x - 4}$
9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 + 2x - 4}$
10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x+1}{2x-3}}$
11. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4}$
12. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + x + 1} - x$
13. $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(2x)$
14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x}$
15. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x) - x \ln(x+2)$