TP - Révisions et compléments sur les calculs de limites

Les formes indéterminées (F.I.) usuelles sont : $\infty - \infty \qquad 0 \times \infty \qquad \dfrac{\infty}{\infty} \qquad \dfrac{0}{0}$

Rem. :

1. $\dfrac{0}{\infty}$ (0), $\quad \dfrac{\infty}{0}$ (∞), $\quad \infty \times \infty$ (∞) **ne sont pas** des formes indéterminées (F.I.)

2. Il y en d'autres, typiquement 1^{∞} : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = e$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x} = 0, \ldots$

1 Lever des formes indéterminée du type $\infty - \infty \qquad 0 \times \infty \qquad \dfrac{\infty}{\infty}$

1.1 Compléments sur les croissances comparées

Th. Soient $a, b > 0$. On a :

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^b}{x^a} = 0^+$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^a}{(\ln x)^b} = +\infty$;

(ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^a}{\exp(bx)} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^a}{\exp(bx)} = 0^+$;

(iii) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a \left|\ln x\right|^b = 0^+$; $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^a \exp(bx) = 0^+$;

□ **Méthode n°1 : factorisation par le terme prépondérant pour les limites en $\pm\infty$**

Exercices

- F.I. du type $\infty - \infty$: Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} x - x^2 + (\ln x)^4$
- F.I. du type $\dfrac{\infty}{\infty}$: Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-\sqrt{x} + \sqrt{\ln x}}{x^2 + e^{\sqrt{2}x}}$

1.2 Composition de limites

□ **Méthode n°2 : on repère une composition**

Th. (Composition des limites) Soient $a, b, \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{X\to b} g(X) = \ell$ alors

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{X\to b} g(X) = \ell.$$

Exemple : Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^{x^2}}$.

On pose $X = x^2$. On a : $\left\{\begin{array}{l} X = x^2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \\ \dfrac{X}{e^X} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+ \end{array}\right.$. Donc, par le théorème de composition des limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^{x^2}} = 0^+$.

Exercices

- F.I. du type $\dfrac{\infty}{\infty}$: Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x^2}}{\sqrt{x}}$
- F.I. du type $0 \times \infty$: Déterminer $\lim\limits_{x\to 1^+} (\ln x)\ln(\ln x)$

1.3 Quantité conjuguée

□ **Méthode n°3 : multiplication par la quantité conjuguée**

Exercice

- F.I. du type $\infty - \infty$: Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-1}$
- F.I. du type $\infty - \infty$: Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-1}$

2 Lever des formes indéterminée du type $\dfrac{0}{0}$

2.1 Cas du rapport deux polynômes

☐ **Méthode n°4 : factorisation par division euclidienne pour limites en $a \in \mathbb{R}$**

Exercice

- F.I. du type $\dfrac{0}{0}$: Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^3-4x}{2x^3-3x-2}$.

☐ **Méthode n°5 : interpréter une limite comme limite d'un taux d'accroissement**

Rappel : Lorsque f est dérivable en un point $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\underbrace{\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\text{F.I. du type } \frac{0}{0}} = f'(a)$$

Th. (Limites par taux d'accroissement usuelles)

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$

(iv) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}$

Exercice

- F.I. du type $\dfrac{0}{0}$: Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x^2}$.
- F.I. du type $\dfrac{0}{0}$: Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x+3)-\ln(3)}{x}$.

3 Exercices

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2},\ \lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}},\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-x},\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x},\ \lim_{x\to 0^-} \frac{-2}{x}\ln\left(\frac{1}{x^2}\right),\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2e^{\sqrt{x}}}{xe^{2x}-1},\ \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}+\ln(x),\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\ln(1+x)}$$

4 Théorèmes d'existence de limite

Soient I un intervalle, x_0 un élément de I ou une extrémité de I et f, g, h des fonctions définies sur I sauf peut-être en x_0.

Th. (Minoration, majoration, encadrement)

(i) **Minoration :** Si, pour tout $x \in I\backslash\{x_0\}$, $f(x) \leq g(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, alors g possède une limite en x_0 et $\displaystyle\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$.

(ii) **Majoration :** Si, pour tout $x \in I\backslash\{x_0\}$, $f(x) \leq g(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, alors f possède une limite en x_0 et $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

(iii) **Encadrement :** Si, pour tout $x \in I\backslash\{x_0\}$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors g possède une limite en x_0 et $\displaystyle\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$.

Exercice

1. Montrer que : $\forall x \in [0,1],\ x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.
2. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Th. (Limite monotone)

Si f est monotone sur $]a,b[$ avec $a,b \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ et $a<b$, alors

(i) f admet en tout point de $]a,b[$ une limite finie à gauche et à droite (non nécessairement égales) ;

(ii) f possède une limite (finie ou infinie) en a et en b.